CONCEPTO DE FUNCIÓN RACIONAL

Sugerencia para quien imparte el curso.

Sugerimos, en esta parte de la presentación, hacer un paréntesis para justificar la manera en que puede operarse algebraicamente con dos funciones, sumándolas, restándolas, etc. Hasta llegar a la división.

Podrían plantearse preguntas como las siguientes:

¿Existe un Álgebra de funciones? De otra manera: dadas dos funciones polinomiales $f(x)$ y $g(x)$, ¿es posible efectuar con ellas operaciones como suma, resta, multiplicación y división?

Efectivamente, dadas las funciones $f(x) = x^2 - x - 6$ y $g(x) = 2x - 3$, se pueden construir nuevas funciones como:

1. La suma de ellas. $F(x) = f(x) + g(x)$; $F(x) = (x^2 - x - 6) + (2x - 3)$; es decir:

¿F(x) = _____?

2. La resta o diferencia de ellas.

$F(x) = f(x) - g(x)$; $F(x) = (x^2 - x - 6) - (2x - 3)$

Reduciendo términos semejantes obtendremos: ***F(x)*** **=** _____

3. El producto de ellas.

$F(x) = f(x) \cdot g(x)$; $F(x) = (x^2 - x - 6) \cdot (2x - 3) = 2x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 3x - 12x + 18$,

¿***F(x)*** **=** _____?

Hasta aquí vemos que las operaciones suma, resta y multiplicación de funciones polinomiales se pueden efectuar en todos los casos y obtenemos nuevamente una función polinomial.

4. La división o cociente de ellas.

Sin embargo, en el caso de la división de funciones ocurrirá lo mismo que con los números enteros:

4.1 Hay divisiones de números enteros que dan lugar a otro número entero:

$\frac{15}{5} = 3$; $\frac{34}{17} = 2$; $\frac{-12}{-3} = 4$; $\frac{-42}{7} = -6$; $\frac{0}{8} = 0$

4.2 Sabemos que hay casos en los que la división de dos enteros no da como resultado un número entero y se tuvo la necesidad de crear los **números racionales**, como: $\frac{15}{7}$; $\frac{17}{35}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{-3}{-11}$; $\frac{9}{-2}$.

4.3 Existe **un único** número entero que jamás puede usarse como divisor.

¿Cuál es?

Invitar a los estudiantes a reflexionar sobre la imposibilidad de llevar a cabo divisiones como las siguientes: $\frac{5}{0}$; $\frac{-3}{0}$; $\frac{800}{0}$.

Algo muy parecido ocurre cuando dividimos funciones polinomiales.

Aquí será conveniente recordar algunos casos de factorización que se utilizarán.

En algunos casos la división es exacta y nos mantenemos dentro de las funciones polinomiales. Por ejemplo:

Si definimos $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x) = x^2 - x - 6$ y $g(x) = x + 2$:

$F(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = x - 3$ porque la división es exacta, con residuo igual a cero.

También puede verse que: $F(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x+2} = x - 3$, de manera que la función $F(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$ equivale a la función $F(x) = x - 3$, excepto en $x = -2$.

¿Por qué?

Hay casos, como los ejemplos que veníamos manejando para la suma, resta y multiplicación: $F(x) = \frac{x^2 - x - 6}{2x - 3}$, en el que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ no tienen factores en común, por lo que manejaremos la función como una expresión racional, con un numerador y un denominador.

Cuando empleamos números racionales, resulta inconveniente trabajar con fracciones no simplificadas, siempre reduciremos a su mínima expresión y cambiaremos $\frac{6}{4}$ por $\frac{3}{2}$; $\frac{-28}{6}$ por $-\frac{14}{3}$; etc.

Lo mismo haremos con las funciones racionales. Siempre que sea posible las simplificaremos eliminando los factores comunes del numerador y denominador, hasta reducirla a su mínima expresión.

Cambiaremos $\frac{x}{x^2-x}$ por $\frac{1}{x-1}$ si $x \neq 0$ y $x \neq 1$; puesto que:

$$\frac{x}{x^2-x} = \frac{x}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}.$$

Cambiaremos $\frac{x^2+3x-40}{x^2-25}$ por $\frac{x+8}{x+5}$, si $x \neq -5$ y $x \neq 5$,

¿Por qué?

Decimos que la fracción $\frac{x^2-x-6}{2x-3}$ es **irreductible**, en el sentido de que no hay factores comunes en el numerador y denominador que puedan simplificarse, o bien que la división no es exacta.

Observar que como ocurrió con los números enteros, la división de dos funciones polinomiales no siempre da como resultado otra función polinomial.

De acuerdo con lo que hemos comentado, al definir una función racional cuidaremos que la función que está en el denominador no tome el valor cero.

En este caso $2x-3 \neq 0$.

Ejemplos de funciones racionales:

$F(x) = \frac{1}{x}$; $F(x) = \frac{1}{x-5}$; $F(x) = \frac{1}{x^2}$; $F(x) = \frac{1}{x^2+3}$;

$F(x) = \frac{4x}{x^2-1}$; $F(x) = \frac{x^3-2x^2-1}{x}$; $F(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}$.

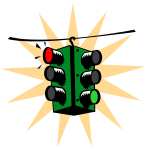
Ejercicio 1

Proponer otras tres funciones racionales:

Es oportuno retroceder un poco y recordar las funciones que obtuvimos al resolver el problema de la zanja y el del tren.

En el problema de la zanja llegamos a la función $F(x) = \frac{108}{x}$, que es una función racional con $f(x) = 108$ y $g(x) = x$.

En el problema del tren obtuvimos la función $F(x) = \frac{375}{x}$, que es una función racional con $f(x) = 375$ y $g(x) = x$.



Conceptos clave:

2. Función Racional

Una **función racional** $F(x)$ es el cociente de dos funciones

$$\boldsymbol{F(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales que no tienen factores en común y $g(x) \neq 0$.

3. Función racional incluye más que variables inversamente proporcionales.

En el concepto clave 1 nos referimos a una clase particular de funciones racionales, las que involucran variables inversamente proporcionales, se hizo así para ejemplificar el concepto de función racional, pero existe una amplia gama de funciones racionales que no implican ese tipo de variación.