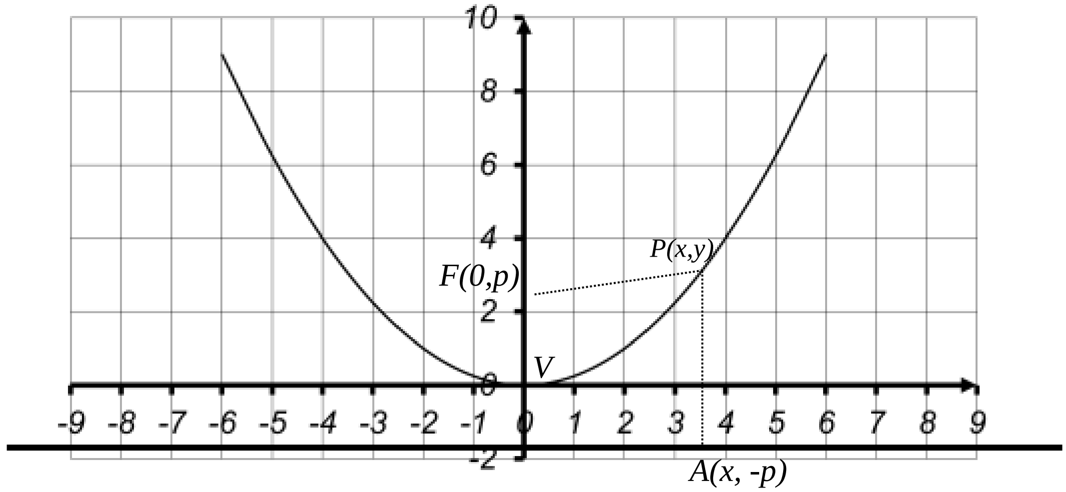
ECUACIÓN CARTESIANA DE UNA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE EL EJE Y

¿Qué forma tomará la ecuación si colocamos la parábola con vértice en el origen y eje focal sobre el eje Y?



Sólo ha cambiado la posición de la parábola, no sus características.

Ahora las coordenadas del foco son $F(0, p)$

Como la directriz en este caso es una recta paralela al eje X, ¿qué forma tiene su ecuación?

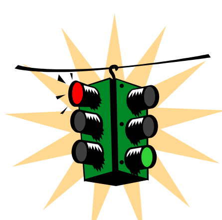
Sigue siendo cierto que $PF = PA$

Sustituyendo las nuevas coordenadas en la expresión anterior:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$$

Efectuando un proceso semejante al utilizado en el caso de la parábola horizontal para simplificar esta expresión, obtendremos:

$$x^2 = 4py$$



Conceptos clave

9. La ecuación que cumplen todos los puntos del plano cartesiano que forman una parábola con vértice en el origen y eje focal el eje Y, a la que llamaremos **vertical**, es: $x^2 = 4py$.

10. El foco de una parábola vertical con vértice en el origen tiene coordenadas $F(0, p)$ y su directriz es la recta horizontal con ecuación $y = -p$

El lado recto mide $L.R. = |4p|$

Ejemplos

4 Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje focal el eje Y y foco $F(0,2.5)$

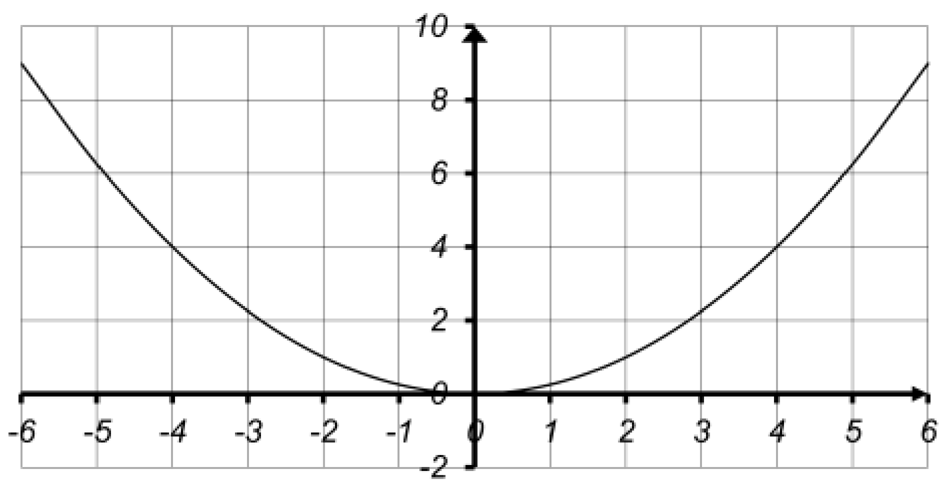
Según los conceptos clave 9 y 10, la ecuación de este tipo de parábolas es $x^2 = 4py$ y su foco $F(0,p)$, en nuestro ejemplo $p = 2.5$, por lo que la ecuación buscada es $x^2 = 4(2.5)y$; $x^2 = 10\,y$

5 Obtener las coordenadas del foco y del vértice, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y bosquejar la gráfica de la parábola $x^2 = 4y$

La ecuación de esta parábola, de acuerdo con el concepto clave 9 es de la forma $x^2 = 4py$, su vértice es el origen y su eje focal es el eje Y.

Además: $4p = 4$; $p = 1$. Podemos establecer que: $F(0,1)$, $V(0,0)$, $dir\ y = -1$, $L.R. = |4(1)| = 4u$.

Localizar estos elementos en la gráfica siguiente:

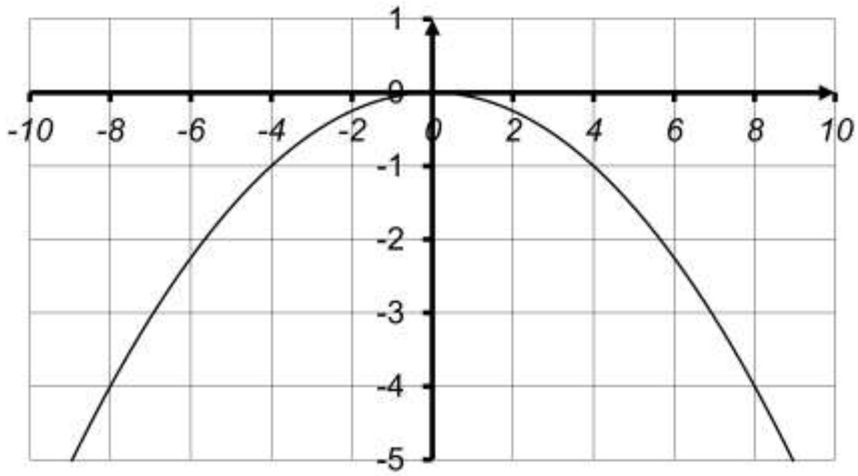


6 Obtener las coordenadas del foco y del vértice, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y bosquejar la gráfica de la parábola $x^2 = -16\,y$

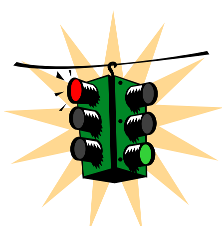
De acuerdo con los conceptos clave 9 y 10:

$$4p = -16;\ \ p = -4;\ \ F(0,-4),\ \ V(0,0),\ \ dir\ y = 4$$

Organizar una discusión con la intención de verificar ¿qué significa en este caso un valor negativo del parámetro p*? Al concluir, observar la gráfica correspondiente:*



¡La parábola abre hacia abajo!



Conceptos clave

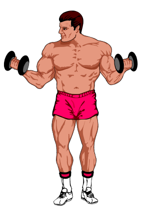
11. En la ecuación de una parábola vertical $x^2 = 4py$: Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba. Y Si $p < 0$ la parábola abre hacia abajo.

En resumen:

	Parábola horizontal	Parábola vertical
Eje focal	Eje X	Eje Y
Vértice	$V(0,0)$	$V(0,0)$
Foco	$F(p,0)$	$F(0,p)$
Ecuación	$y^2 = 4px$	$x^2 = 4py$
Directriz	$x = -p$	$y = -p$
Lado Recto	$\|4p\|$	$\|4p\|$
Si $p > 0$	Abre hacia la derecha	Abre hacia arriba
Si $p < 0$	Abre hacia la izquierda	Abre hacia abajo

Estamos en condiciones de resolver el problema inicial.

Podemos considerar el paraboloide que forma el reflector del radiotelescopio, generado al girar una parábola vertical en torno a su eje focal, con vértice en el origen, en la que el parámetro p puede tomar, por ejemplo el valor 3; $p = 3$ unidades. Por lo que su ecuación es $x^2 = 12y$



Ejercicio 2

Encontrar las coordenadas del foco, la longitud del lado recto, la ecuación de la directriz y bosquejar la gráfica de cada una de estas parábolas con vértice en el origen.

1. $y^2 = 2x$
2. $x^2 = 9y$
3. $3y^2 = - 15x$
4. $x^2 + 18y = 0$

Obtener la ecuación de la parábola con vértice en el origen que cumple las siguientes condiciones. Bosquejar cada gráfica.

5. $F(7,0)$
6. $F(0,-5)$
7. Directriz $x + 6 = 0$
8. Pasa por el punto $(-3,-9)$ y es horizontal.
9. Pasa por el punto $(-3,-9)$ y es vertical.