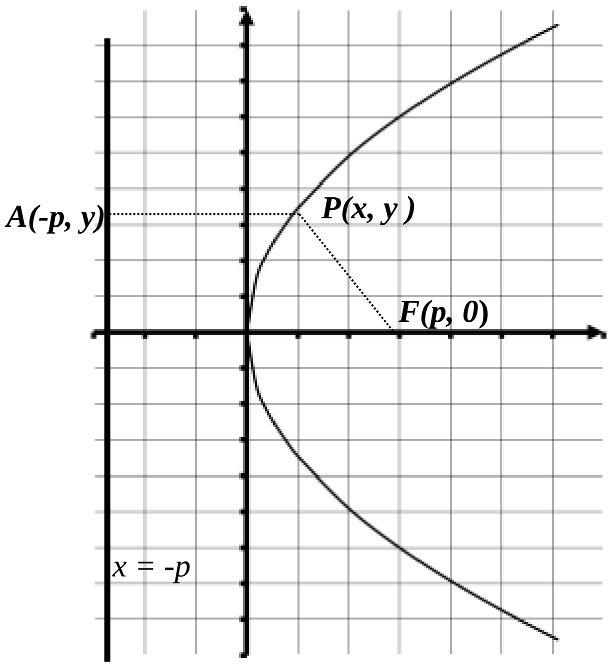
ECUACIÓN CARTESIANA DE UNA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE EL EJE *X*



Si suponemos que el punto de coordenadas variables $P(x, y)$ pertenece a la parábola, sus coordenadas deben cumplir la condición establecida por la definición:

$PF = PA$

Sustituyendo las coordenadas:

$$PF = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

$$PA = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

$$PA = x + p$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$$

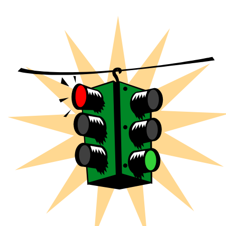
Elevando al cuadrado ambos miembros de esta igualdad, para eliminar el radical, tenemos:

$$\left(\sqrt{(x-p)^2 + y^2}\right)^2 = (x+p)^2; \quad (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado:

$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$

Transponiendo y reduciendo términos semejantes llegamos a: $y^2 = 4\,px$

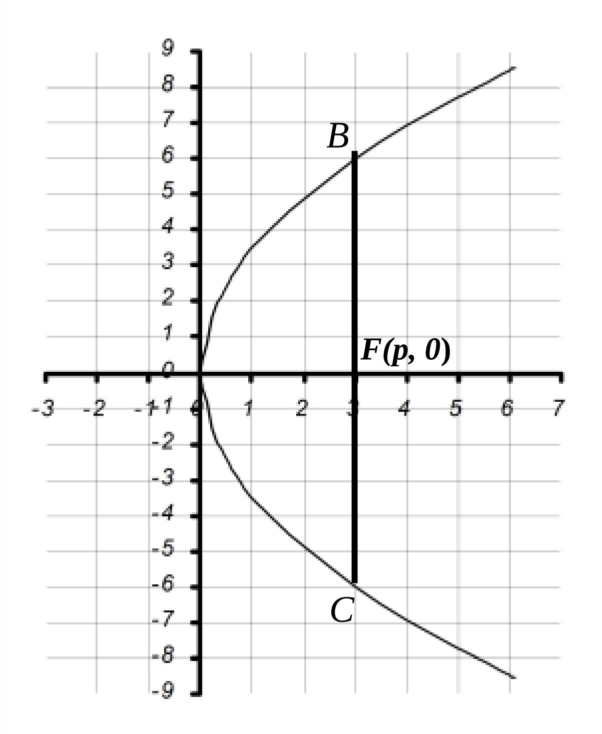


Conceptos clave

5. La ecuación que cumplen todos los puntos del plano cartesiano que forman una parábola con vértice en el origen y eje focal el eje X, a la que llamaremos **horizontal**, es: $y^2 = 4px$.

6. Donde el foco tiene coordenadas $F(p,0)$ y su directriz es la recta vertical con ecuación $x = -p$

7. Se llama lado recto de una parábola a una cuerda perpendicular a su eje, que pasa por el foco.



En esta figura, el lado recto es el segmento BC.

Por la ubicación de los puntos B y C, conocemos su abscisa, para ambos $x = p$

Las coordenadas de B son $B(p, y)$ y *las de* C: $C(p, -y)$

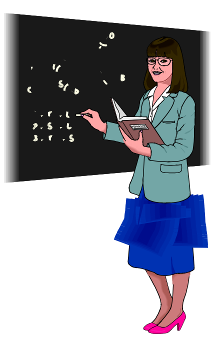
Para encontrar la coordenada y de cada uno de ellos usaremos el hecho de que pertenecen a la parábola y por lo tanto sus coordenadas cumplen la ecuación $y^2 = 4px$:

$$y^2 = 4p(p) = 4p^2; \; y = \sqrt{4p^2};$$

$$y = \pm 2p$$

Ahora sabemos que B tiene coordenadas $B(p, 2p)$ y $C(p, -2p)$, y podemos obtener la longitud del lado recto:

$$L.R. = \sqrt{(p-p)^2 + (2p+2p)^2} = |4p|; \quad L.R. = |4p|$$



Ejemplo 1

Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje focal el eje X y foco $F(1.5,0)$

De acuerdo con el concepto clave 5, la ecuación de este tipo de parábola depende del valor del parámetro p:

$y^2 = 4px$ y su foco tiene coordenadas $F(p,0)$, en nuestro ejemplo $p = 1.5$, de donde la ecuación buscada es: $y^2 = 4(1.5)x$; $y^2 = 6x$.

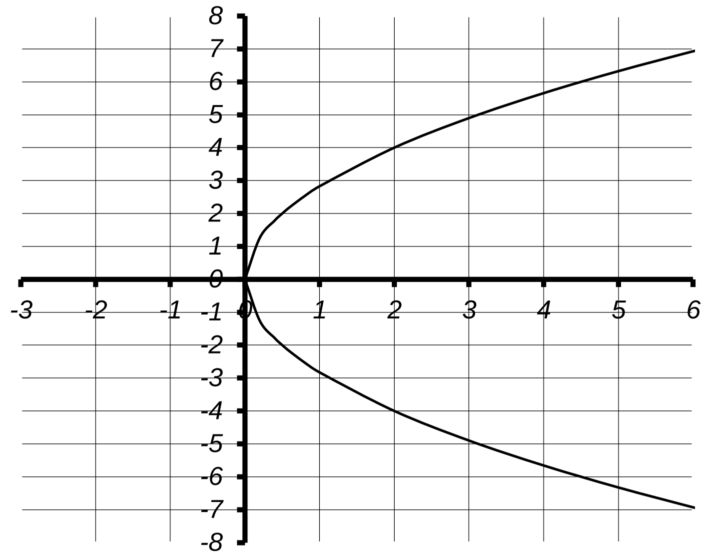
Ejemplo 2

Obtener las coordenadas del foco y del vértice, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y bosquejar la gráfica de la parábola $y^2 = 8x$

De acuerdo al concepto clave 5, la ecuación de esta parábola es de la forma $y^2 = 4px$, por lo tanto su vértice es el origen y su eje focal es el eje X.

Además: $4p = 8$; por lo que $p = 2$. De donde podemos establecer que las coordenadas del foco y del vértice son: $F(2,0)$, $V(0,0)$, la ecuación de la directriz: $dir\ x = -2$, la longitud de su lado recto: $L.R. = |4(2)| = 8u$.

Localizar estos elementos en la gráfica siguiente:

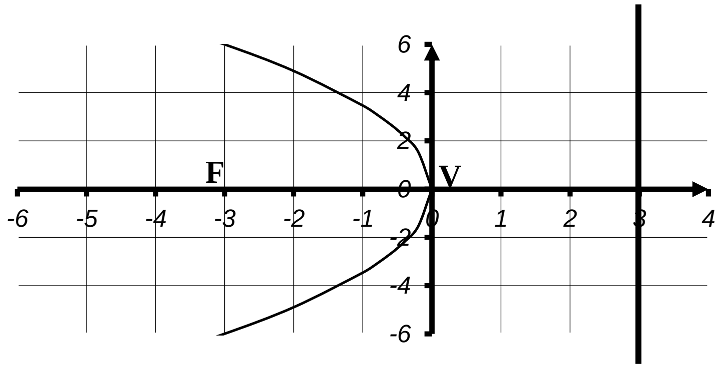


Ejemplo 3

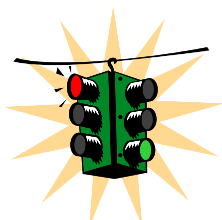
Obtener las coordenadas del foco y del vértice, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y bosquejar la gráfica de la parábola cuya ecuación es $y^2 = -12x$

Considerando nuevamente el concepto clave 5, en este caso $4p = -12$, por lo que $p = -3$; lo que significa que las coordenadas del foco ahora son $F(-3, 0)$, del vértice $V(0,0)$, la directriz tiene ecuación: $dir\ x = 3$.

Organizar una discusión con la intención de verificar ¿qué significa un valor negativo del parámetro p? Al concluir, observar la gráfica correspondiente:



¡La parábola abre hacia la izquierda!



Conceptos clave

8. En la ecuación de una parábola horizontal $y^2 = 4px$:

Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha. Y

Si $p < 0$ la parábola abre hacia la izquierda.