ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE CON CENTRO FUERA DEL ORIGEN

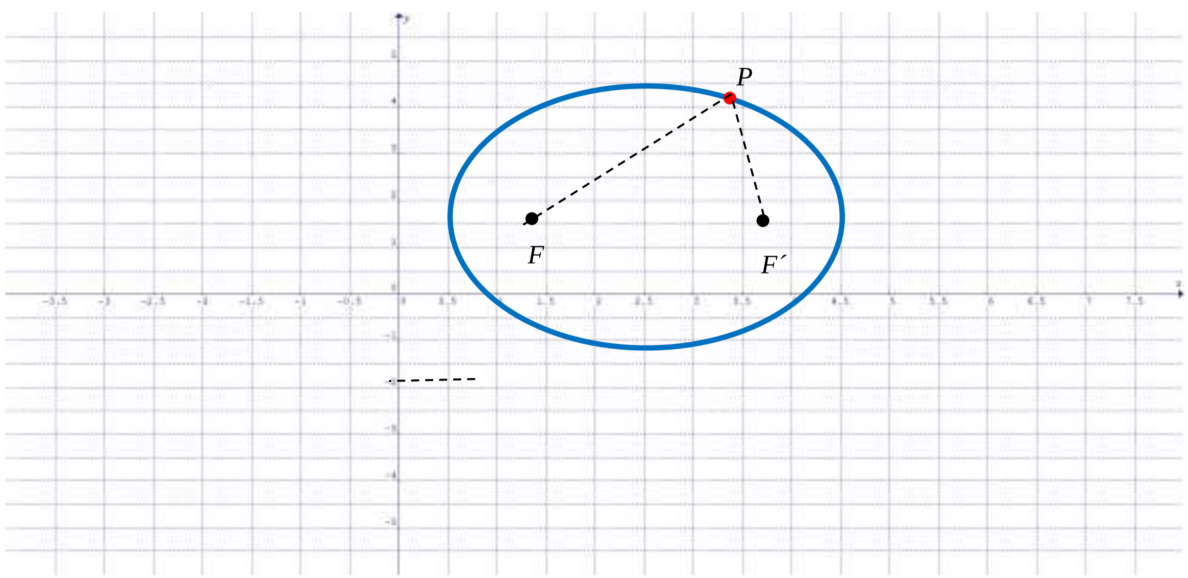
Sugerencias para quien imparte el curso

Consideramos conveniente realizar todo el proceso de obtención de la ecuación ordinaria de la elipse en conjunto con los alumnos para ir aclarando algunas dudas sobre las operaciones algebraicas involucradas.

Para lograr los aprendizajes de esta unidad y en particular obtener la ecuación ordinaria de la elipse, ubiquémosla en un Plano Cartesiano, con el eje mayor paralelo al eje de las abscisas, colocando su centro en el punto (h,k) fuera del origen. *Se utilizan convencionalmente estas letras para designar al punto principal de referencia de una cónica.*

Las coordenadas de los focos serán $F(h-c,k)$ y $F'(h+c,k)$.

Las coordenadas de los vértices serán $V(h-a,k)$ y $V'(h+a,k)$ como se puede apreciar en la figura siguiente;



Para obtener la ecuación de la elipse debemos utilizar la definición de ella como lugar geométrico.

$$PF+PF'=2a$$

Para cualquier punto $P(x,y)$ de la elipse, las distancias a los focos son:

$$PF=\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}=\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2} \quad \text{y}$$

$$PF' = \sqrt{\left(x-(h+c)\right)^2 + \left(y-k\right)^2} = \sqrt{\left(x-h-c\right)^2 + \left(y-k\right)^2}$$

Si sumamos estas dos expresiones tendremos

$$PF + PF' = \sqrt{\left(x-h+c\right)^2 + \left(y-k\right)^2} + \sqrt{\left(x-h-c\right)^2 + \left(y-k\right)^2} = 2a$$

Para simplificar la ecuación anterior pasamos el segundo radical al segundo miembro de la igualdad.

$\sqrt{\left(x-h+c\right)^2 + \left(y-k\right)^2} = 2a - \sqrt{\left(x-h-c\right)^2 + \left(y-k\right)^2}$ y elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación.

$$\left(x-h+c\right)^2 + \left(y-k\right)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{\left(x-h-c\right)^2 + \left(y-k\right)^2} + \left(x-h-c\right)^2 + \left(y-k\right)^2$$

Podemos eliminar los términos semejantes $\left(y-k\right)^2$ y desarrollar los trinomios al cuadrado para obtener

$$x^2 + h^2 + c^2 - 2xh + 2xc - 2hc = 4a^2 - 4a\sqrt{\left(x-h-c\right)^2 + \left(y-k\right)^2} + x^2 + h^2 + c^2 - 2xh - 2xc + 2hc$$

Eliminamos términos semejantes

$$2xc - 2hc = 4a^2 - 4a\sqrt{\left(x-h-c\right)^2 + \left(y-k\right)^2} - 2xc + 2hc$$

Agrupamos términos semejantes

$$4xc - 4hc - 4a^2 = -4a\sqrt{\left(x-h-c\right)^2 + \left(y-c\right)^2}$$

Podemos dividir todos los términos entre 4 y factorizar c en los dos primeros términos

$c\left(x-h\right) - a^2 = -a\sqrt{\left(x-h-c\right)^2 + \left(y-k\right)^2}$ ahora elevamos nuevamente al cuadrado para eliminar la raíz cuadrada.

$$c^2\left(x-h\right)^2 - 2ca^2\left(x-h\right) + a^4 = a^2\left(x^2 + h^2 + c^2 - 2xh - 2xc + 2hc + \left(y-k\right)^2\right)$$

Desarrollamos los productos del segundo miembro agrupando

$$c^2\left(x-h\right)^2 - 2ca^2\left(x-h\right) + a^4 = a^2\left(x^2 - 2xh + h^2\right) - 2a^2c\left(x-h\right) + a^2c^2 + a^2\left(y-k\right)^2$$

Eliminamos términos semejantes y agrupamos para escribirla como

$$a^4 - a^2c^2 = \left(a^2 - c^2\right)\left(x-h\right)^2 + a^2\left(y-k\right)^2$$

De los términos del primer miembro factorizamos a^2

$$a^2\left(a^2 - c^2\right) = \left(a^2 - c^2\right)\left(x-h\right)^2 + a^2\left(y-k\right)^2$$

Ya habíamos establecido una relación entre a, b y c de donde se obtiene que $a^2 - c^2 = b^2$, finalmente esto lo sustituimos en la ecuación anterior y obtenemos

$$a^2b^2 = b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Esta es la ecuación ordinaria de una elipse horizontal con centro en el punto $C(h,k)$, distinto del origen.

En la ecuación (1), si dividimos ambos miembros por a^2b^2 podemos escribir también la ecuación en la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Con la información que hemos estado trabajando, podemos abordar dos tipos de problemas analíticos:

1. Dada la ecuación de una elipse deducir de ella todas las características de la curva particular de que se trate. Y
2. Dadas algunas características de una elipse particular, obtener la ecuación ordinaria que le corresponde.

Abordaremos en primer lugar problemas del tipo 1.

Ejemplo 1

Una elipse tiene su centro en el punto *C(-3,4)*, uno de sus focos es *F´(-1,4)* y la longitud del semieje menor es $\sqrt{5}$.

Determinar:

a) las coordenadas del otro foco
b) los vértices,
c) La longitud del lado recto
d) su excentricidad
e) su ecuación y
f) su gráfica.

Solución:

a) Tomando en cuenta las coordenadas del centro y del foco, deducimos que la elipse es horizontal pues ambos puntos están sobre una recta horizontal. La distancia del centro al foco es de dos unidades, por lo que $c=2$.

Por tanto el otro foco tiene coordenadas $F(h-c,k) = F(-3-(2),4) = F(-5,4)$.

b) Como el semieje menor mide $b=\sqrt{5}$ utilizamos la relación entre a, b y c del teorema de Pitágoras para obtener el valor de a.

$a^2 = b^2 + c^2$ de donde $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

Sustituimos valores para obtener $a = \sqrt{5+4} = 3$

Entonces los vértices tendrán coordenadas:

$V(h-a,k) = V(-3-3,4) = V(-6,4)$ y el otro $V'(h+a,k) = V'(-3+3,4) = V'(0,4)$

c) La longitud del lado recto es $l.r. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\left(\sqrt{5}\right)^2}{3} = \frac{10}{3}$

d) La excentricidad de la elipse es $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

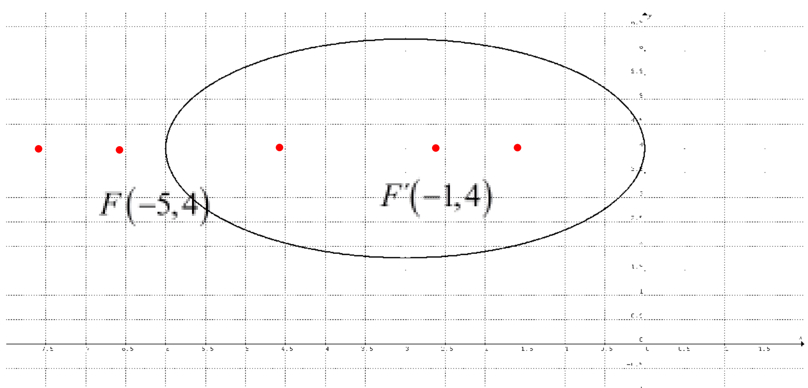
e) La ecuación de la elipse la podemos escribir como:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 (x-(-3))^2 + (3)^2 (y-4)^2 = 45 \quad \text{o bien } 5(x+3)^2 + 9(y-4)^2 = 45$$

según la forma (1). También se puede escribir como

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{5} = 1$$ de acuerdo a la forma (2)

f) A continuación se muestra la gráfica correspondiente, aparecen marcados los focos, vértices y centro.



Ejemplo 2

Para la ecuación $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$:

a) Encontrar las coordenadas del centro.

b) Obtener las coordenadas de los vértices y de los focos.

c) Dar la longitud de sus ejes mayor y menor.

d) Calcular la longitud del lado recto.

d) Evaluar la excentricidad y

e) Bosquejar la gráfica correspondiente.

Como la ecuación tiene la misma forma que la ecuación ordinaria de la elipse identificamos que corresponde a una elipse horizontal.

a) Las coordenadas del centro son $(3,-2)$

b) $a^2=25, b^2=16$ por lo que $a = 5$ y $b= 4$ y obtenemos el valor de c mediante la expresión $a^2=b^2+c^2$, de donde $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$

Por consiguiente las coordenadas de los focos son:

$$F(h-c,k)=F(3-3,-2)=F(0,-2)$$
$$F'(h+c,k)=F'(3+3,-2)=F'(6,-2)$$

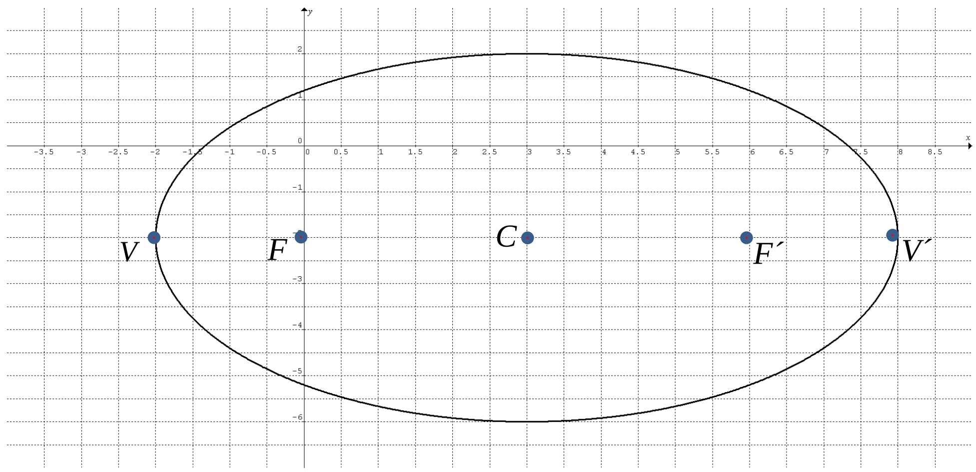
De modo similar las coordenadas de los vértices son:

$$V(h-a,k)=V(3-5,-2)=V(-2,-2)$$
$$V'(h+a,k)=V'(3+5,-2)=V'(8,-2)$$

c) La longitud del lado recto es $l.r.=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(16)}{5}=\frac{32}{5}$

d) La excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$

e) La gráfica se muestra enseguida, en ella aparecen marcados el centro, los foco y los vértices



Ejemplo 3

Para la ecuación $9(x-2)^2+16(y+3)^2=144$, encontrar las coordenadas del centro de la elipse, de los vértices y focos, así como las longitudes de los ejes y del lado recto, el valor de la excentricidad y bosquejar su gráfica.

Solución:

La ecuación tiene la forma (1) de una elipse horizontal:

$b^2(x-h)^2+a^2(y-h)^2=a^2b^2$, de la que sabemos las coordenadas del centro, vértices y focos, así como obtener los valores de cada uno de sus parámetros.

$h = 2$

$k = -3$

$a^2 = 16;\ a = 4$

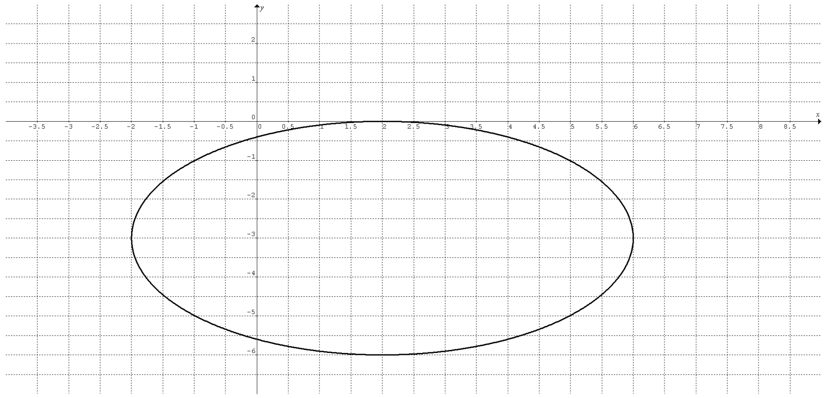
$b^2 = 9;\ b = 3$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}=2.64$

De donde el centro tiene coordenadas *C(2,-3),* los vértices *V(2-4,-3)* y *V´(2+4,-3), V(-2,-3) y V´(6,-3)*; focos *F(2-2.64, -3)* y *F´(2+2.64 ,-3), F(-0.64, -3)* y *F´(4.64,-3).* Eje mayor = *8u,* eje menor = *6u.*

$e = \frac{2.64}{4}$ y lado recto = $\frac{9}{2}$

Cuya gráfica se ve así:



Ejemplo 4

Obtener la ecuación, la excentricidad, el lado recto y la gráfica de la elipse si su centro es *C(-5,6)*, un foco es *F´(-2,6)* y un vértice es *V´(-1,6)*.

Solución:

Los tres puntos proporcionados tienen la misma ordenada por lo que la elipse es horizontal.

$a = 4, c = 3$, por tanto $b = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

El otro foco y vértice tienen coordenadas *F(-8, 6)* y *V(-9, 6)*

La excentricidad es $e = \dfrac{3}{4}$ y el lado recto $l.r. = \dfrac{14}{4}$

La ecuación será $\dfrac{(x+5)^2}{16} + \dfrac{(y-6)^2}{7} = 1$ y la gráfica se verá así: