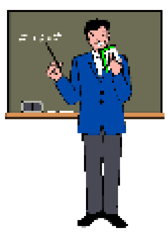
TRAZO DE LA ELIPSE Y DEFINICIÓN COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Problema de la Tierra y el Sol

Sabemos que la Tierra describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Si el eje mayor de esa elipse mide 300 000 000 km, el Sol se encuentra en uno de los focos y la excentricidad de esa elipse es $\frac{1}{62}$, ¿cuál es la distancia mínima de la Tierra al Sol en su recorrido? ¿Y la máxima?



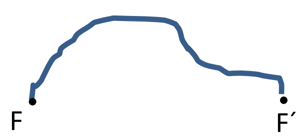
Sugerencias para quien imparte el curso

Dejaremos para más adelante la solución de este problema, una vez que hayamos obtenido la ecuación de una elipse.

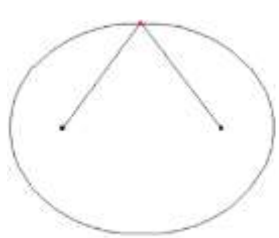
Para que los alumnos logren los aprendizajes de esta unidad, proponemos en primer lugar construir la elipse utilizando el "método del jardinero", enseguida ubicar la elipse y los elementos que la constituyen, en un sistema de coordenadas cartesianas y finalmente obtener su ecuación. De acuerdo a esto, es conveniente al inicio de esta unidad, pedir a los alumnos traigan a clase una cartulina o una tabla de triplay, un cordel y dos "chinches" o clavos. Consideramos importante también construir la elipse con regla y compás, como trabajo fuera de clase.

Método del jardinero (indicaciones para los alumnos)

En una tabla o una cartulina, fijar dos clavos o dos chinches en los puntos F y $F´$. Tomar una cuerda o cordel con una longitud mayor que la distancia entre los puntos F y $F´$.



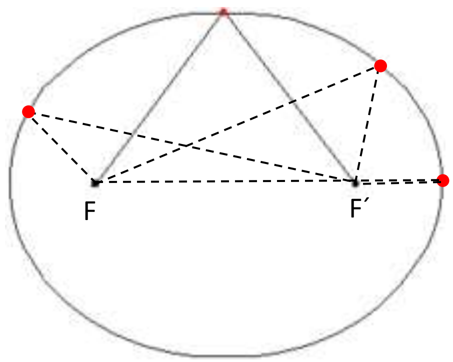
Estirar la cuerda con la punta de un lápiz y desplazar el lápiz por donde lo permita la cuerda siempre tensa, observar cómo empieza a aparecer una curva como se muestra en la figura siguiente.



Dependiendo de qué lado de la cuerda se coloque el lápiz, se trazará una mitad de la curva. La otra mitad de la curva se obtendrá colocando el lápiz del otro lado de la cuerda.

Observar que cuando se coloca el lápiz hacia la derecha del punto $F´$, considerando un punto alineado con los puntos F y $F´$, la cuerda queda doblada y lo mismo sucede si desplazas el lápiz hacia la izquierda del punto F considerando el mismo segmento. **La longitud de la cuerda no cambia**.

Esta es una propiedad de la elipse que nos permite identificarla como lugar geométrico: al sumar las distancias de cualquier punto P de la elipse al punto F y al punto $F´$, la suma siempre es la misma y es igual a la longitud de la cuerda.



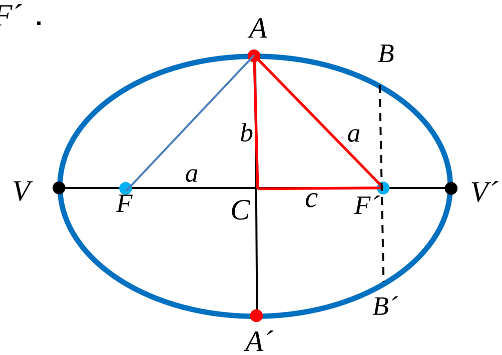
Discutir con los alumnos lo anterior

Si escribimos lo anterior en lenguaje analítico: $PF + PF´ = k$, con k una constante.

Resumimos lo anterior formalizando la definición de la elipse:

"***La elipse es el lugar geométrico de los puntos en el plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, es siempre igual a una constante mayor que la distancia entre esos puntos***."

En particular, como se muestra en la figura siguiente, el punto A (rojo) divide la cuerda exactamente a la mitad y ese punto pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{FF´}$, esto significa que la mediatriz pasa por el punto medio del segmento $\overline{FF´}$.



Identifiquemos letras en la figura:

A los extremos de la mediatriz de $\overline{FF'}$ los llamaremos A y A'. Al punto medio del segmento $\overline{FF'}$ que es el centro de la elipse, lo designaremos con la letra C.

Identifiquemos los elementos de la elipse:

Los puntos F y F' corresponden a los focos.

La recta L que pasa por los focos y vértices se llama **eje focal** de la elipse. A la distancia FF' se le llama distancia focal y se designa con $2c$, por tanto el ancho focal se designa con c.

Los puntos donde la elipse corta al eje focal se llaman **vértices, V y V´.**

Al segmento $\overline{VV'}$ se le denomina eje mayor y su longitud se designa con $2a$, que en este caso corresponde a la longitud inicial de la cuerda. En consecuencia, la longitud del semieje mayor es a.

Al segmento $\overline{AA'}$ que es una cuerda de la elipse, perpendicular al eje mayor y pasa por el centro de la elipse se le denomina eje normal o eje menor y su longitud es $2b$, por lo tanto b es la longitud del semieje menor.

Al segmento perpendicular al eje focal que une dos puntos de la elipse $\overline{BB'}$ es una cuerda que pasa por uno de los focos, se llama **lado recto** y su longitud se obtiene mediante el cociente $l.r. = \frac{2b^2}{a}$. Más adelante probaremos esta igualdad.

Al cociente que resulta de dividir la distancia focal FF' entre la longitud del eje mayor V_1V_2 se le llama **excentricidad**:

$$e = \frac{FF'}{VV'} = \frac{c}{a}$$

De la figura anterior se puede observar que a, b y c forman un triángulo rectángulo y por lo tanto hay una relación entre ellos, mediante el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ siendo } \boldsymbol{a > b} \text{ y } \boldsymbol{a > c}.$$

Ésta es una relación muy importante entre las constantes a, b y c pues se puede utilizar cuando se conocen dos de estos valores y se desconoce el tercero.

Hasta ahora hemos construido una elipse con ejes paralelos a los ejes de coordenadas. Si el eje mayor es paralelo al eje de las abscisas la elipse se considera horizontal, pero si el eje mayor es paralelo al eje de las ordenadas, a esa elipse se le considera vertical.

Es posible trabajar con elipses cuyos ejes no son paralelos a los ejes de coordenadas, pero éstas salen del alcance de este curso.