SISTEMAS DE REFERENCIA, EL CARTESIANO Y EL POLAR

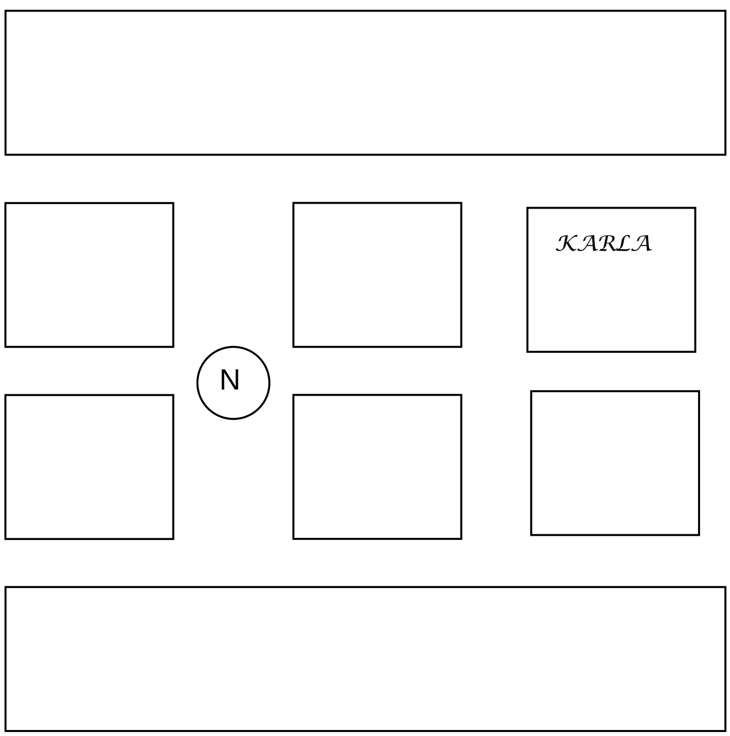
Sugerencias para quien imparte el curso.

Consideramos conveniente proponer inicialmente a los alumnos un problema como el que se presenta a continuación, para hacer ver la necesidad de contar con la información necesaria y suficiente para localizar un punto en el plano y necesariamente utilizar un sistema de referencia además de remitirlo al origen histórico de la Geometría Analítica.

El problema de la ubicación

Javier quedó de encontrarse con su amiga Beatriz al frente de la tienda "*KARLA*" en cierto centro comercial. Beatriz le dio las siguientes indicaciones: "Llegas a la fuente de Neptuno que está en el centro comercial, caminas 50 pasos hacia tu derecha y después 35 pasos hacia la izquierda, ahí nos vemos".

Sin embargo, al llegar Javier a la fuente de Neptuno se da cuenta que parten de la fuente 4 pasillos como se muestra en la figura siguiente:



¿Qué información hizo falta darle a Javier?

¿Cómo podrías ayudarle?

Recordar que en los cursos anteriores los alumnos ya han utilizado un sistema de referencia para ubicar puntos de una gráfica: el Sistema Cartesiano

Este sistema recibe el nombre de Cartesiano pues se debe a René Descartes quien es considerado el padre de la Geometría Analítica.

Descartes publicó en 1637 su “Discurso del Método”, que contiene tres famosos apéndices: La Geometría, La Dióptrica (La geometría aplicada a la óptica) y Los meteoros.

Descartes tuvo gran interés por tomar lo mejor de la geometría y lo mejor del álgebra y unirlos para corregir las limitaciones de una con la ayuda de la otra.

Él vio la potencia del álgebra y su superioridad sobre los métodos Geométricos de los griegos, al proporcionar una metodología más amplia para mecanizar los procesos de razonamiento y minimizar el trabajo de resolver problemas.

El producto de la aplicación del álgebra a la geometría fue la Geometría de Coordenadas o simplemente llamada Geometría Analítica.

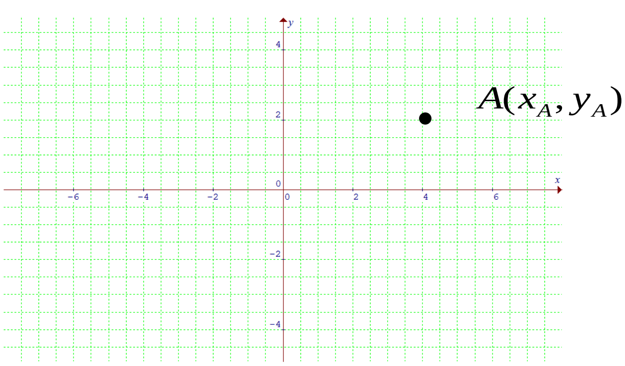
Precisamente, a partir de aquí se inicia el estudio de la Geometría Analítica. ***No pierdan de vista lo siguiente: se utilizará el álgebra para resolver situaciones geométricas.***

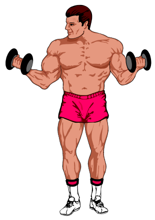
1.- SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Recordar que, en el sistema cartesiano se toman como referencia 2 líneas rectas perpendiculares entre sí llamadas Ejes de coordenadas o *Eje* X, de abscisas y *Eje* Y, de ordenadas.

El punto donde se intersectan dichas rectas se llama origen

A cada punto en el plano Cartesiano le corresponden dos valores numéricos, su abscisa y su ordenada. A esta pareja de números se le conoce como las coordenadas cartesianas o coordenadas rectangulares del punto, que representaremos de manera generalizada como se muestra en la siguiente figura, donde x_A es la abscisa del punto A y y_A es su ordenada.





Ejercicio 1

1. Traza el plano cartesiano en tu cuaderno y ubica los puntos siguientes: A(3,7), B(0,-4), C(-4,5). Si los unes en el orden A con B, B con C y C con A, ¿qué figura forman?____________________________

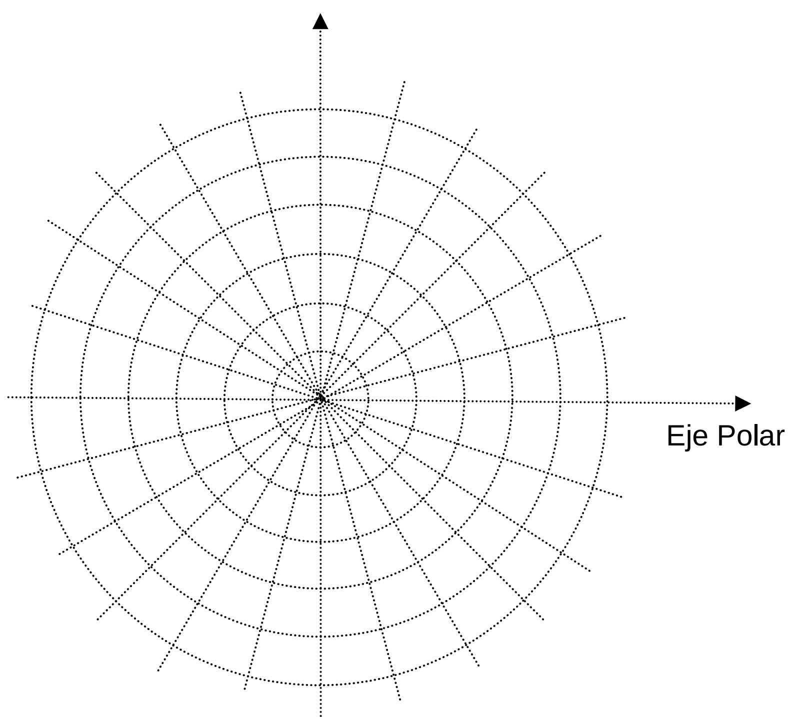
2. Localiza en el plano cartesiano los siguientes puntos: C(-3,5), D(-6,-3), E(1,-5), F(3.5, 6)

3. En el plano cartesiano une los puntos F(-5,-2), G(-2,5), H(2,7), I(5,1), J(2,-4), en ese orden para formar un pentágono.

Cuando se quiere dar información sobre la posición determinada de un punto, es necesario señalar un sistema de referencia. Éste puede ser el Sistema cartesiano o el Sistema polar.

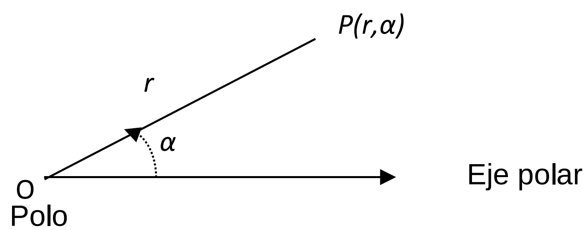
2. SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

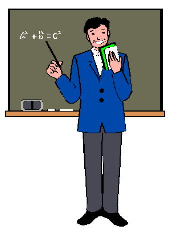
En este sistema de referencia, de Coordenadas Polares, un punto P puede ser ubicado mediante una familia de circunferencias centradas en el punto O, que ahora llamaremos ***Polo*** y rayos que parten de ese punto.



Tomaremos ahora como referencia un rayo horizontal dirigido hacia la derecha del Polo llamándolo ***<u>eje polar.</u>*** Las coordenadas de cualquier punto constarán ahora de la distancia dirigida r, del polo al punto, y un ángulo α, medido en grados o en radianes, a partir del eje polar y en dirección contraria a las manecillas del reloj.

(r,α) corresponden a las coordenadas polares del punto P





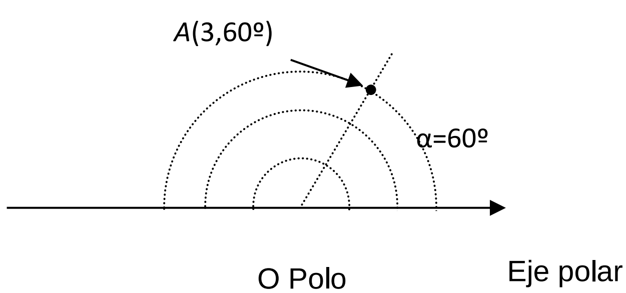
Sugerencias para quien imparte el curso.

Proponemos en este momento mostrar a los alumnos ejemplos como los siguientes para ayudar a comprender la localización de puntos en el plano Polar. Requerirán regla o escuadra, compás y transportador.

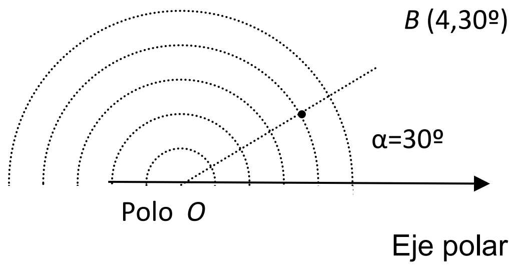
Ejemplo 1

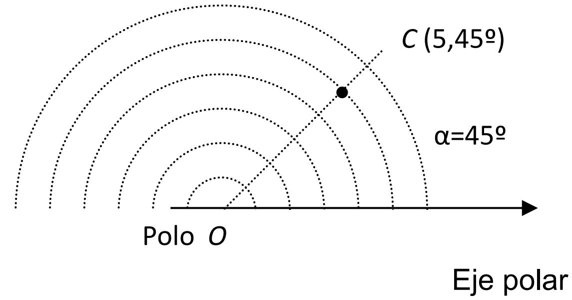
Localizar los puntos $A(3{,}60º)$, $B(4{,}30º)$, $C(5{,}45º)$ y $D(4{,}210º)$

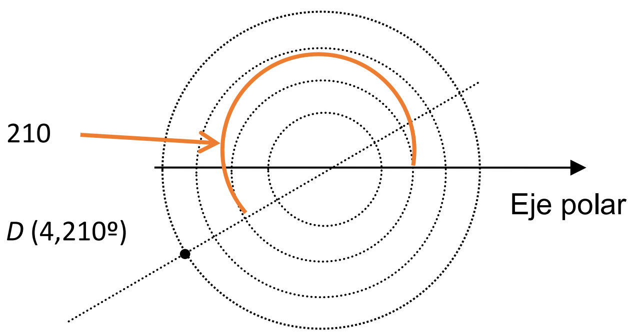
Para ubicar el primer punto tracemos un segmento a 60º del eje polar y con una longitud de 3 unidades.



Traza ahora los puntos B, C y D







En este momento es conveniente recordar la conversión de grados a radianes que ya estudiaron en Matemáticas II. Simplemente, si 360º equivalen a 2π radianes, entonces:

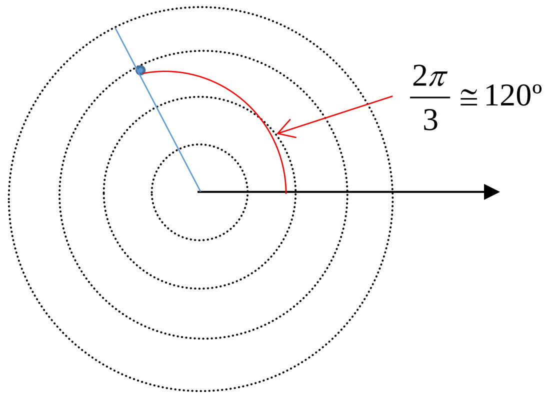
$\pi\ rad \cong 180^{\circ}$ $\quad \frac{\pi}{2} rad \cong 90^{\circ}$ $\quad \frac{\pi}{4} rad \cong 45^{\circ}$ $\quad \frac{\pi}{6} rad \cong 30^{\circ}$

$\frac{\pi}{3} rad \cong 60^{\circ}$ $\quad \frac{\pi}{12} rad \cong 15^{\circ}$ $\quad etc.$

Donde el símbolo $\cong$ se usa para indicar que las medidas son equivalentes.

De acuerdo a lo anterior, es posible proporcionar las coordenadas de un punto en el sistema Polar dando los valores de los ángulos en unidades de radianes.

Por ejemplo, localicemos el punto $A(3, \frac{2\pi}{3})$



Puntualicemos algunos aspectos de este sistema de coordenadas.

1. Los valores del ángulo α pueden ser positivos o negativos, adoptaremos la convención siguiente:

- Ángulos positivos se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj, a partir del eje polar.

- Ángulos negativos se miden en el sentido de las manecillas del reloj, también a partir del eje polar,

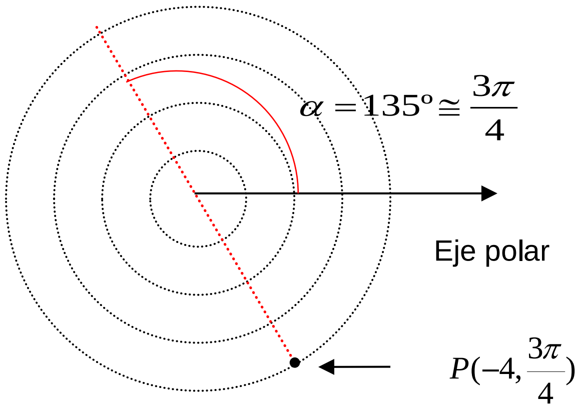
2. r también puede ser positivo o negativo.

- **Si r es negativo, el punto se localiza en el rayo α + π.**

En este caso, en lugar de medir $|r|$ unidades a lo largo del rayo determinado por α, medimos las $|r|$ unidades a lo largo del rayo que comienza en O y cuya dirección es opuesta a la determinada por α.

Por ejemplo, para localizar el punto $P(-4, \frac{3\pi}{4})$

Se traza una circunferencia de radio 4 y se traza la dirección $\frac{3\pi}{4}$, pero en dirección opuesta, lo cual resulta en la dirección $\frac{7\pi}{4}$ equivalente a $\frac{3\pi}{4} + \pi$ y se localiza el punto.



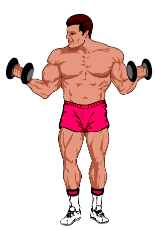
A diferencia del sistema de coordenadas rectangulares, en el sistema de coordenadas polares la forma de describir la posición de un punto no es única. Por ejemplo, el punto $P(4,15^{\circ})$ se podría escribir como $P(4,15^{\circ}+360^{\circ})$ o $P(4,15^{\circ}+2\pi)$

O también con los ángulos $15^{\circ}+2(2\pi)$, 15º más dos vueltas,

$15^{\circ}+3(2\pi)$, 15º más tres vueltas y en general

$15^{\circ}+n(2\pi)$, 15º más ***n*** vueltas.

Entonces en general un punto *(r, α)* puede ser representado en las formas *(r , α + 2π n),* siendo ***n*** un número entero.



Ejercicio 1

1. En un plano polar ubica los puntos:
$E(3,120^{\circ})$, $F(6,45^{\circ})$, $G(2,180^{\circ})$, $H(4,150^{\circ})$, $I(6,405^{\circ})$, $J(3,480^{\circ})$

2. Grafica ahora en un sistema de coordenadas polares los puntos

$P(-2,\pi)$, $Q\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$, $R\left(-5,\frac{\pi}{3}\right)$, $S\left(6,\frac{5\pi}{6}\right)$

¿HAY ALGUNA RELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y LAS POLARES?

Las coordenadas rectangulares (x, y) de cualquier punto del plano utilizan solamente dos variables y las ecuaciones a que den lugar se llamarán ecuaciones cartesianas o rectangulares. Estas ecuaciones contienen al menos una de estas variables.

Las coordenadas polares (r, α) de un punto en el plano polar utilizan también solo dos variables y las ecuaciones a que den lugar se llamarán ecuaciones polares.

También las ecuaciones polares contienen una o ambas variables r y α.

Ejemplos de ecuaciones cartesianas son:

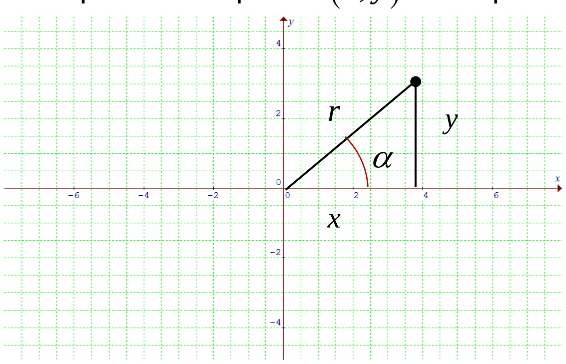
$$x = 3,\ 2y = 5,\ 3x - 5y = 10,\ x^2 + y^2 = 16,\ 4x^2 + 6y^2 = 12,\ x + y^2 + 4 = 0, \text{etc.}$$

Y ejemplos de ecuaciones polares son:

$$\alpha = \frac{\pi}{6},\ r = 5,\ r = 2\cos\alpha,\ rsen\alpha - 2 = 0,\ r = \frac{2}{2 - \cos\alpha}, \text{etc.}$$

Se puede transformar una ecuación cartesiana en una polar o viceversa, para esto conozcamos la relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares.

Coloquemos un punto (x, y) en el plano cartesiano.



Hagamos coincidir el polo y el eje polar con el origen y la parte positiva del eje X, respectivamente. De la figura se deducen las relaciones:

$$x = r\cos\alpha,\ \ y = r\,sen\,\alpha,\ \ x^2 + y^2 = r^2$$

$$\alpha = arc\tan\frac{y}{x},\ r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejemplo 1.

Obtener las coordenadas cartesianas del punto $P(5, 60^\circ)$.

En este caso $r = 5$ y $\alpha = 60^\circ$

Por lo tanto $x = 5\cos 60^\circ = 5\left(\frac{1}{2}\right) = 2.5, \quad y = 5\,sen\,60^\circ = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2.5\sqrt{3}$

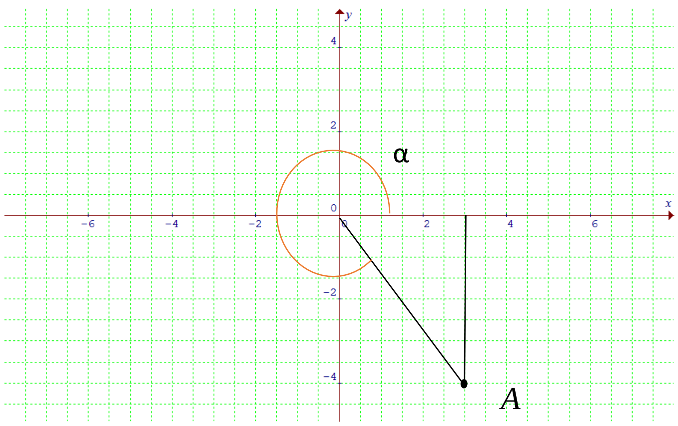
De modo que las coordenadas cartesianas que corresponden al punto $P(5, 60^\circ)$ son $P\left(2.5, 2.5\sqrt{3}\right)$

Ejemplo 2.

¿A qué coordenadas polares corresponden las coordenadas rectangulares del punto (3, -4) ?

Como $x = 3$ y $y = -4$ entonces $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{9+16} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

$\alpha = arc\tan\left(\frac{-4}{3}\right)$ para este caso se pueden obtener muchos ángulos, pero será mejor considerar el ángulo positivo menor de 2π, que en este caso sería 5.3558900 radianes(equivalente a 306º 52´11´´), el punto se muestra en la figura siguiente,



También es posible transformar una ecuación rectangular a una polar o viceversa.

Ejemplo 3

Obtén la ecuación polar correspondiente a la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = 16$

Bastará con sustituir en x y en y las expresiones $x = r\cos\alpha,\ y = r\,sen\,\alpha$ y simplificar.

$r^2\cos^2\alpha + r^2 sen^2\alpha = 16$

En la expresión se puede factorizar r^2 , aplicar la identidad trigonométrica

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ y entonces nos quedaría:

$r^2 = 16$ la cual se puede escribir simplemente como $r = 4$

Ésta última es la ecuación polar correspondiente a la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = 16$

Ejemplo 4

Obtén la ecuación polar correspondiente a la ecuación cartesiana $3x - 5y = 10$

Sustituimos las expresiones $x = r\cos\alpha,\ y = r\,sen\,\alpha$ en lugar de x y y.

Nos resulta: $3r\cos\alpha - 5r\,sen\,\alpha = 10$

Ejemplo 5

Obtén la ecuación polar correspondiente a la ecuación cartesiana $2x^2 + 2y^2 + 4x - 2y + 6 = 0$

Sustituimos en la ecuación y tendremos:

$$2r^2\cos^2\alpha + 2r^2 sen^2\alpha + 4r\cos\alpha - 2r\,sen\,\alpha + 6 = 0$$

Podemos factorizar $2r^2$ de los dos primeros términos

$$2r^2\left(\cos^2\alpha + sen^2\alpha\right) + 4r\cos\alpha - 2r\,sen\,\alpha + 6 = 0$$

Aplicando la identidad trigonométrica $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ la ecuación quedaría:

$$2r^2 + 4r\cos\alpha - 2r\,sen\,\alpha + 6 = 0$$

Ejemplo 6

Obtén la ecuación cartesiana correspondiente a la ecuación polar $r = 2\cos\alpha$

Sustituimos las ecuaciones de transformación

$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = 2\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}$ multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el radical y obtendremos $x^2 + y^2 = 2x$ la cual se puede escribir también como

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Ejercicio 2

Obtén la ecuación polar o cartesiana, según corresponda, de las ecuaciones siguientes:

1. $4x+6y=15$
2. $4x^2+10y^2=40$
3. $y=-3x^2+12x+5$
4. $r=\dfrac{2}{2-\cos\alpha}$