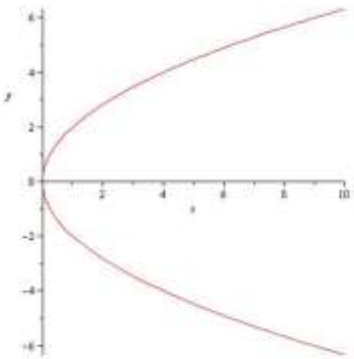
FUNCIÓN CUADRÁTICA Y LA ECUACIÓN DE UNA PARÁBOLA HORIZONTAL



El problema de la parábola horizontal

¿Qué relación hay entre las propiedades analíticas de la función cuadrática y las propiedades geométricas de la parábola horizontal?

Como recordaremos:

La ecuación general de una parábola horizontal es de la forma

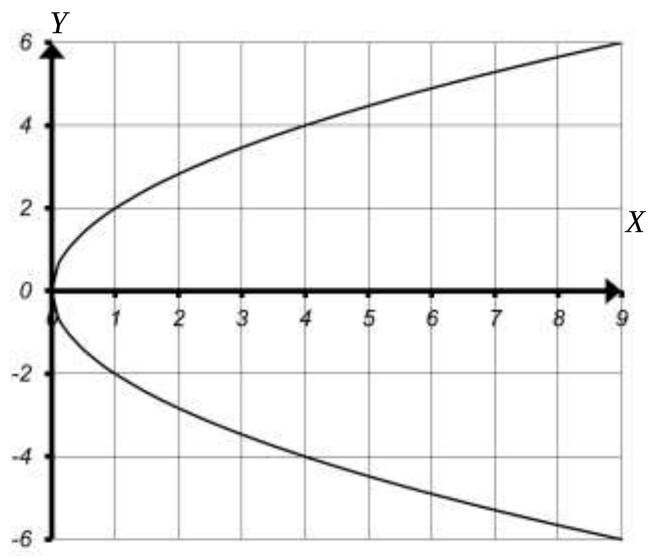
$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$

Pues bien, la ecuación ordinaria de una parábola horizontal con vértice en el origen es $y^2 = 4px$ y da lugar a la expresión $y = \pm\sqrt{4px}$, que no es una función, puesto que a cada $x \neq 0$ del dominio le corresponden dos valores de y, lo que no está permitido en las funciones.

Ejemplo 18

Pensemos en la parábola $y^2 = 4x$, cuya gráfica aparece a continuación:

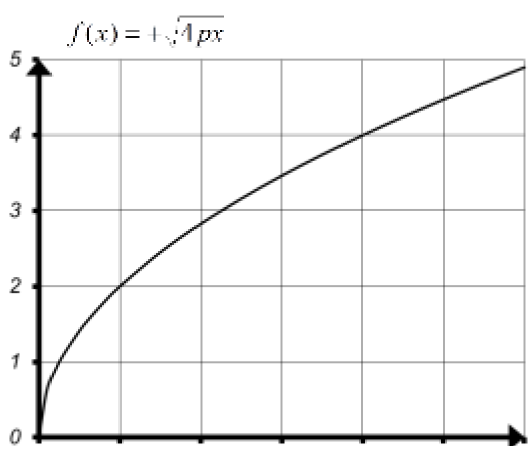
x	0	1	1	4	4	9	9
$y = \pm\sqrt{4x}$	0	2	-2	4	-4	6	-6

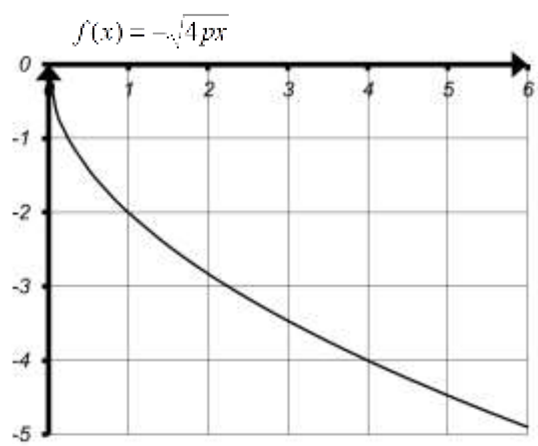


Es claro que para cada $x > 0$, y toma dos valores. Si $x = 1, y = 2$ pero también $y = -2$, etc.

Por lo que $y = \pm\sqrt{4px}$ no representa una función.

Podemos hacer que la expresión anterior sea una función asignando a la raíz cuadrada un solo signo. $f(x) = +\sqrt{4px}$ o bien $f(x) = -\sqrt{4px}$. Cada una de las cuales corresponde a media parábola horizontal: $f(x) = +\sqrt{4px}$ a la mitad superior y $f(x) = -\sqrt{4px}$ a la inferior.





Otra forma de resolver el problema de que la ecuación de una parábola horizontal no corresponda a una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, es intercambiando los papeles de las variables x y y.

Generalmente consideramos a y como una función de x, $y = f(x)$, es decir, y es la variable que depende de x, x es la variable independiente. Cuando tabulamos damos valores arbitrarios a x y calculamos el valor que le corresponde a y para cada x.

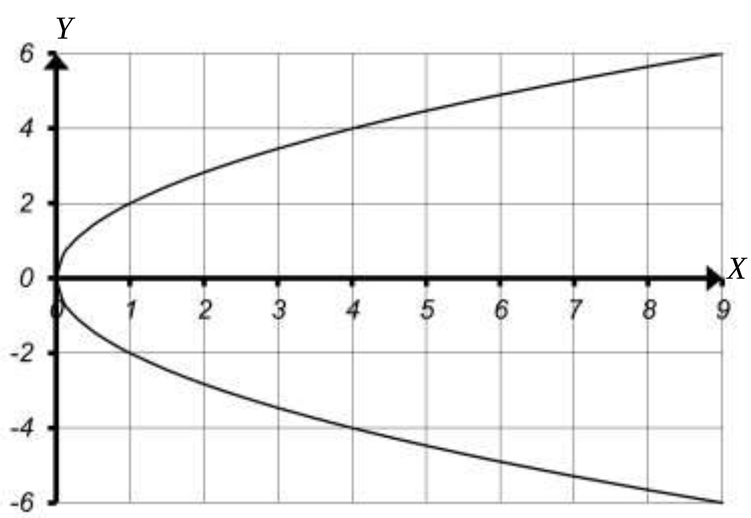
Teóricamente no cometemos ningún error si intercambiamos los papeles de ambas variables y consideramos a x como función de y, es decir, $x = f(y)$.

En nuestro ejemplo, la expresión $y^2 = 4x$ se convierte en $x = \frac{y^2}{4}$, en la que y, variable independiente, puede tomar cualquier valor real, sin restricción. Mientras que x sólo tomará valores no negativos, porque $\frac{y^2}{4}$ siempre es no negativo.

Con este intercambio de variables, ahora es a y a quien le daremos valores arbitrarios y calcularemos para cada y el valor que le corresponde a x.

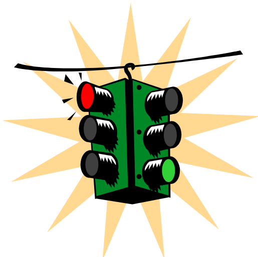
y	-6	-4	-2	0	2	4	6
$x = \frac{y^2}{4}$	9	4	1	0	1	4	9

Ahora tenemos las parejas ordenadas (x, y) con las que obtenemos la siguiente gráfica, que ahora sí corresponde a una función, porque a cada y se le asocia **una y sola una** x :



Al analizar esta gráfica tengamos muy en cuenta que la variable y es independiente y que x es una función de y. Los ejes coordenados se conservaron en la posición usual, para no girar la curva.

Con la transformación que hemos hecho, intercambiando los papeles de las variables x y y, buscaremos la relación entre la ecuación cuadrática $f(y) = ay^2 + by + c$ y la ecuación general de la parábola horizontal $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.



Conceptos clave

23 La función cuadrática $f(y) = ay^2 + by + c$ es de la misma forma que la ecuación de una parábola horizontal expresada en forma general:

$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, haciendo $x = -\frac{C}{D}y^2 - \frac{E}{D}y - \frac{F}{D}$

Si trabajamos con la función cuadrática $x = ay^2 + by + c$, como lo hicimos cuando llevamos la ecuación general de una parábola horizontal a la forma ordinaria:

$$ay^2 + by + c = a\left(y^2 + \frac{b}{a}y\right) + c$$

$$= a\left(y^2 + \frac{b}{a}y + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - \frac{b^2}{4a}, \text{ de donde}$$

$$x = a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

por tanto: $a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 = x + \frac{b^2}{4a} - c$ y finalmente llegamos a la expresión

$\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(x + \frac{b^2}{4a} - c\right)$, que reconocemos como una parábola horizontal de la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, con vértice $V(h, k)$, que en este caso: $V\left(c - \frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$,

A la ecuación obtenida le podemos aplicar el siguiente análisis:

Si $a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$ y por lo tanto el factor $x + \frac{b^2}{4a} - c > 0$ puesto que el lado izquierdo de la expresión $\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2$ siempre es no negativo. De $x + \frac{b^2}{4a} - c > 0$ se deduce que $x > c - \frac{b^2}{4a}$

Esto último significa que $a > 0$ implica que los puntos de la parábola tienen una abscisa mayor que la del vértice, es decir, están a la derecha del vértice, lo que a su vez significa que la función se extiende ¡hacia la derecha!, como se vio en la parábola. Y por lo tanto el vértice es el valor más a la izquierda de la función cuadrática. **¡Es un valor mínimo para x!**

En cambio, si $a < 0$, $\frac{1}{a} < 0$ el factor $x + \frac{b^2}{4a} - c < 0$ para que el lado izquierdo de la expresión $\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2$ se conserve no negativo. De $x + \frac{b^2}{4a} - c < 0$ se deduce que $x < c - \frac{b^2}{4a}$.

Lo que significa que los puntos de la parábola tienen una abscisa menor que la del vértice, es decir, la función se extiende ¡hacia la izquierda!, como ocurrió en la parábola. Por lo tanto el vértice es el valor más a la derecha de la función cuadrática. **¡Es un valor máximo para x!**

Hemos visto cómo, analizando la función cuadrática, hemos arribado a resultados similares a los obtenidos al estudiar la parábola horizontal, lo que por cierto, da respuesta a la pregunta con que iniciamos esta sección.

Este análisis comparativo puede llegar más lejos.

Revisando la ecuación de una parábola horizontal como función cuadrática, $f(y) = ay^2 + by + c$, podemos determinar los intervalos donde la función $f(y)$ es positiva y donde es negativa, lo que equivale a saber dónde la parábola está a la derecha del eje Y (eje vertical) y dónde está a la izquierda. Así como los puntos donde la parábola corta al eje Y, que corresponden a los ceros de la función, que a su vez son las raíces de la ecuación $ay^2 + by + c = 0$

Una vez calculadas y localizadas las raíces de la ecuación, lo que no representa mayor dificultad, encontraremos que $y_1 = r_1$ y $y_2 = r_2$, supongamos que $r_1 < r_2$.

1. Si $a > 0$, $f(y) = ay^2 + by + c = (y - r_1)(y - r_2)$

$f(y)$ será positiva, es decir, estará a la derecha del eje Y, cuando el producto anterior sea positivo, y eso ocurrirá cuando se cumpla alguna de estas dos posibilidades:

i) $y - r_1 > 0$ y $y - r_2 > 0$, lo que a su vez implica que: $y > r_1$ y $y > r_2$ pero como $r_1 < r_2$, cumpliéndose $y > r_2$ automáticamente se cumple $y > r_1$, por tanto $f(y)$ es positiva en el intervalo (r_2, ∞).

ii) $y - r_1 < 0$ y $y - r_2 < 0$, lo que a su vez implica que: $y < r_1$ y $y < r_2$ pero como $r_1 < r_2$, cumpliéndose $y < r_1$ automáticamente se cumple $y < r_2$, por tanto $f(y)$ también es positiva en el intervalo $(-\infty, r_1)$.

$f(y)$ será negativa cuando el producto $(y - r_1)(y - r_2)$ sea negativo, y eso ocurrirá cuando se cumpla alguna de estas dos posibilidades:

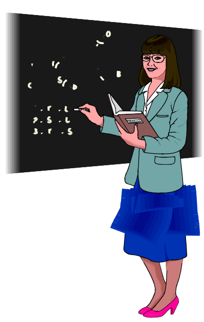
i) $y - r_1 > 0$ y $y - r_2 < 0$, lo que a su vez implica que: $y > r_1$ y $y < r_2$ pero como $r_1 < r_2$, lo que debe cumplirse es la desigualdad $r_1 < y < r_2$. Por tanto $f(y)$ es negativa en el intervalo (r_1, r_2).

ii) $y - r_1 < 0$ y $y - r_2 > 0$, lo que a su vez implica que: $y < r_1$ y $y > r_2$ pero como $r_1 < r_2$, es imposible cumplir ambas condiciones. Por lo tanto esta posibilidad no aporta soluciones a la desigualdad.

2. Si $a < 0$, como la parábola abre hacia la izquierda y si $r_1 < r_2$, $f(y)$ será positiva en el intervalo (r_1, r_2) y negativa en $(-\infty, r_1)$ y en (r_2, ∞).

3. Si $r_1 = r_2$, la función será tangente al eje Y, la parábola tiene su vértice sobre el eje Y.

4. Si la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ no tiene soluciones reales, la función no corta al eje Y.



Ejemplos

Encontrar las coordenadas del punto más a la derecha o más a la izquierda de la función cuadrática dada en cada inciso, así como los valores de y donde esa función está a la derecha, a la izquierda o sobre el eje Y.

21 $f(y) = y^2 - 2y - 8$

$x = y^2 - 2y - 8 = (y^2 - 2y) - 8 = (y^2 - 2y + 1) - 8 -1$

$x = (y - 1)^2 - 9;\ (y - 1)^2 = x + 9$

La parábola correspondiente a la gráfica de esta función abre hacia la derecha, porque $a = 1 > 0$, por lo tanto $f(y)$ tendrá un punto más a la izquierda, que es el vértice de la parábola, con coordenadas $V(-9, 1)$.

Los ceros de la función son las raíces de la ecuación $y^2 - 2y - 8 = 0$, verificar que en efecto: $y_1 = 4$ y $y_2 = -2$.

La gráfica corta al eje Y en los puntos $(0, -2)$ y $(0, 4)$

Para determinar el intervalo donde la función es positiva, o sea, está a la derecha del eje Y, basta con resolver la desigualdad $y^2 - 2y - 8 > 0$; $(y - 4)(y + 2) > 0$. Esta desigualdad se cumple en dos casos:

i) Si $y - 4 > 0$ y $y + 2 > 0$

$y > 4$ y $y > -2$, condiciones que se cumplen ambas sólo si $y > 4$

ii) Si $y - 4 < 0$ y $y + 2 < 0$

$y < 4$ y $y < -2$, condiciones que se cumplen ambas sólo si $y < -2$

Por lo tanto, $f(y)$ es positiva, o está a la derecha del eje Y, en el intervalo $(-\infty,-2)$ y en $(4,\infty)$

Para determinar el intervalo donde la función es negativa, es decir, donde $x = f(y)$ está a la izquierda del eje Y, hay que resolver la desigualdad $y^2 - 2y - 8 < 0$; $(y - 4)(y + 2) < 0$. Esta desigualdad se cumple en dos casos:

i) Si $y - 4 > 0$ y $y + 2 < 0$

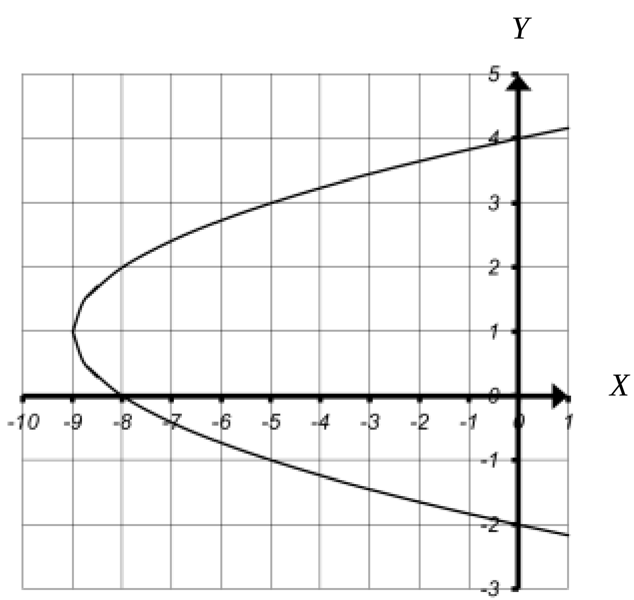
$y > 4$ y $y < -2$, imposible cumplir ambas condiciones.

ii) Si $y - 4 < 0$ y $y + 2 > 0$

$y < 4$ y $y > -2$, condiciones que se cumplen ambas sólo si $-2 < y < 4$

Por tanto, $f(y)$ es negativa en el intervalo $(-2,4)$, está a la izquierda del eje Y.

Verificar estos resultados en la gráfica de $f(y) = y^2 - 2y - 8$ que se muestra a continuación.



Una vez más, recordemos que esta gráfica se construyó con parejas (x,y). Donde la variable y es independiente y que x es una función de y. Los ejes coordenados se conservaron en la posición usual, para no girar la curva.

22 $f(y) = -y^2 + y - \frac{1}{4}$

$$x = -y^2 + y - \frac{1}{4} = -(y^2 - y) - \frac{1}{4}$$

$$= -\left(y^2 - y + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

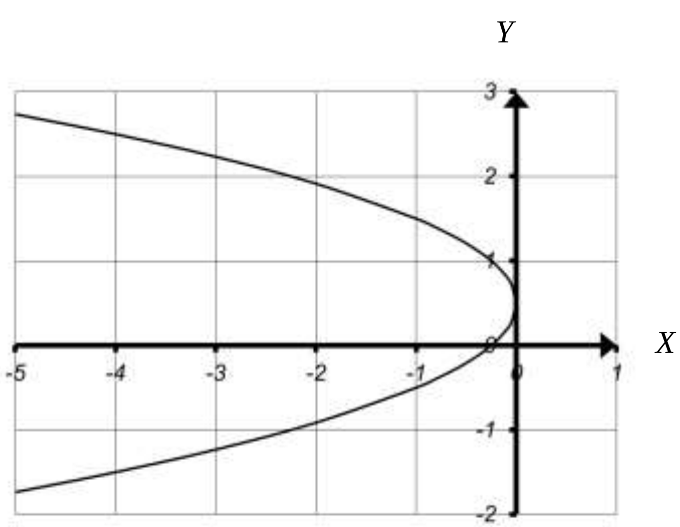
$x = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2$ *La* parábola correspondiente abre hacia la izquierda porque $a = -1 < 0$, por lo tanto tiene un máximo para x, es decir, un punto más a la derecha que cualquiera, con coordenadas $V\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Los ceros de la función son las raíces de la ecuación $-y^2 + y - \frac{1}{4} = 0$, verifica que en efecto: $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$.

El único punto donde la gráfica de la función corta al eje Y es $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

La gráfica de $f(y)$ es tangente al eje Y, es *negativa* en el intervalo $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$, porque $x = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < 0$ para $y \neq \frac{1}{2}$.

Verificar estos resultados en la gráfica de $f(y) = -y^2 + y - \frac{1}{4}$ que se muestra a continuación.



23 $f(y) = 3y^2 – 12y + 13$

$x = 3y^2 – 12y + 13 = 3(y^2 – 4y) + 13$

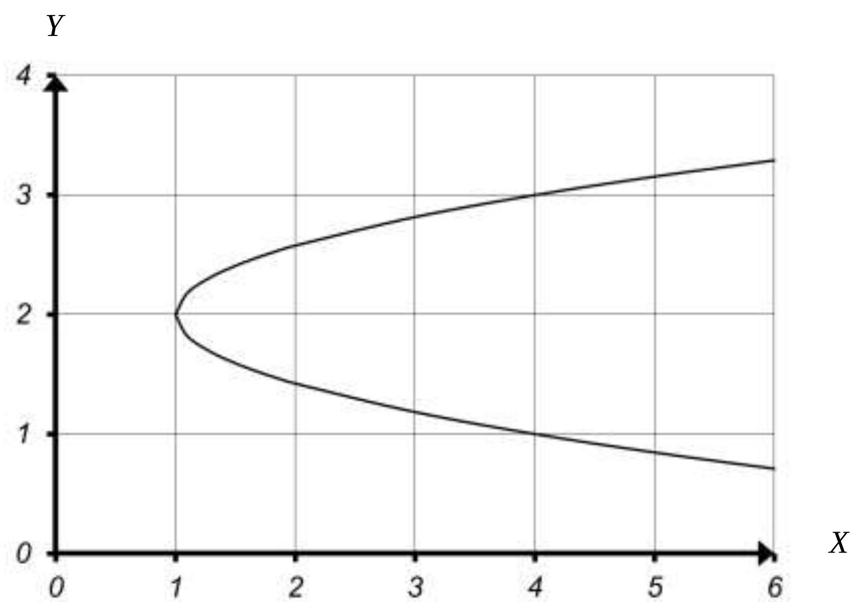
$\quad = 3(y^2 – 4y + 2^2) + 13 – 12$

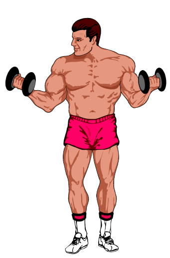
$y = 3(y – 2)^2 + 1$

Parábola que abre hacia la derecha porque $a = 3 > 0$, por lo tanto tiene un mínimo para x, un punto más a la izquierda que cualquiera, con coordenadas $V(1, 2)$. $f(y)$ es *positiva* en todo su dominio, porque $3(y – 2)^2 +1>0$.

Los ceros de la función son las raíces de la ecuación $3y^2 – 12y + 13 = 0$, comprobar que esta ecuación no tiene raíces reales: $y = \dfrac{12 \pm \sqrt{-12}}{6}$

Verificar estos resultados en la gráfica de $f(y) = 3y^2 – 12y + 13$ que se muestra a continuación.





Ejercicio 9

Encontrar las coordenadas del punto más a la derecha o más a la izquierda de la función cuadrática dada en cada inciso, así como los valores de y donde esa función es *positiva, negativa o cero*. Si se trata de una función que no corta al eje Y o es tangente a él, indícarlo también.

1. $f(y) = 4y^2 + 8y – 1$
2. $f(y) = - y^2 + 6y – 6$

3. $f(y) = 2y^2 + 20y + 50$
4. $f(y) = -2y^2 - 4y - 3$
5. $f(y) = y^2 - 4$