LA FUNCIÓN CUADRÁTICA Y LA ECUACIÓN DE UNA PARÁBOLA VERTICAL

El problema de las relaciones

¿Qué relación hay entre las propiedades analíticas de la función cuadrática y las propiedades geométricas de la parábola?

Seguramente al estudiar esta unidad han surgido varias situaciones que nos recuerdan conceptos abordados en cursos anteriores.

Por ejemplo, al ver la ecuación general de una parábola vertical

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ vino a la mente lo aprendido en Matemáticas II sobre funciones cuadráticas:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, puesto que de $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ se obtiene:

$$y = -\frac{A}{E}x^2 - \frac{D}{E}x - \frac{F}{E}.$$

Nos preguntamos cuándo se va a cerrar el círculo, cuándo se van a conectar las ideas manejadas entonces con las presentadas aquí.

La respuesta es: ¡Ahora!

Consideramos pertinente mencionar en este momento algunos conceptos que podrían surgir al realizar los análisis que se propondrán a continuación.

1. Una función se constituye así:

Una regla de correspondencia que asocia a cada elemento del conjunto $\mathbf{D}$ *uno y sólo un elemento del conjunto* $\mathbf{C}$.

Tenemos entonces una función cuyo dominio es el conjunto $\mathbf{D}$ *y su contradominio es* $\mathbf{C}$*; esto se representa así:* $\boldsymbol{f : D \to C}$

Al analizar este importante concepto matemático surgen algunas

Observaciones:

i. Las expresiones "la función $f(x)$", "la función $y = f(x)$", "la función $x^2 - x + 1$", deben interpretarse con cuidado. Los símbolos "$f(x)$", "y", "$x^2 - x + 1$" representan números, los números $\boldsymbol{y}$ *que la función* $\boldsymbol{f}$ *asocia a los números* $\boldsymbol{x}$*. Una función NO es un número, sino una manera de asociar un único número* $\boldsymbol{y}$ *a cada número* $\boldsymbol{x}$ *del dominio.*

ii. Una función NO es una fórmula. Aunque la regla de correspondencia es parte esencial de una función y generalmente se da en forma de expresión algebraica, como:

a) $f(x) = x\,(200 - x)$; b) $f(x) = 3x - 1$

c) $f(x) = x^2 - 7x + 8$; d) $f(x) = -\sqrt{x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; f) $f(x) = sen\ x$

puede haber una función perfectamente definida sin una fórmula o expresión algebraica, por ejemplo:

$f(x)$ = mayor entero menor o igual que x

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$$

$f(x) = 1$ si x es un entero, $f(x) = -1$ si x no es entero

$f(x)$ = número de letras requeridas como mínimo para expresar en español el número racional x.

3. En cuanto a la construcción de la gráfica de una función:

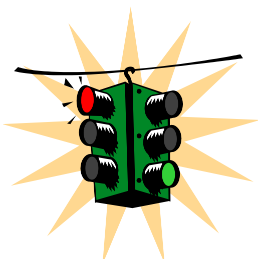
- *La regla de correspondencia indica con precisión y de manera inequívoca qué operaciones debemos llevar a cabo con la variable independiente* $\boldsymbol{x}$*, para obtener el único valor* $\boldsymbol{y}$ *que le corresponde a cada* $\boldsymbol{x}$*.*
- *El dominio de la función $y = f(x)$ deberá estar definido claramente, para saber qué valores puede tomar la variable independiente* $\boldsymbol{x}$*.*
- *Si damos a* $\boldsymbol{x}$ *un valor numérico* x_1*, que está en el dominio de la función,* $\boldsymbol{y}$ *tomará el valor numérico* $\boldsymbol{y_1}$*, que está en el contradominio.*
- *Los dos números* $\boldsymbol{x_1}$*,* $\boldsymbol{y_1}$ *determinan un punto Q_1 en el plano cartesiano, con coordenadas $Q_1\,(x_1,y_1)$.*
- *Si* $\boldsymbol{x}$ *toma otro valor numérico* $\boldsymbol{x_2}$ *,* $\boldsymbol{y}$ *tomará el valor* $\boldsymbol{y_2}$ *y la pareja (x_2,y_2) define otro punto $Q_2\,(x_2,y_2)$.*
- *Se continúa el proceso anterior para un número "suficiente" de puntos.*

- *Se unen los puntos graficados por medio de una línea continua, si el dominio de la función es un subconjunto de $\Re$.*

- *Se llama **gráfica de la función f(x)** al lugar geométrico de todos los puntos cuyas coordenadas se obtienen tomando **x** del dominio de la función $f(x)$ y calculando **y** con la regla de correspondencia.*

4. La gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola.

5. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$.



Conceptos clave

22 La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es de la misma forma que la ecuación de una parábola vertical expresada en forma general:

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, haciendo $y = -\frac{A}{E}x^2 - \frac{D}{E}x - \frac{F}{E}$

Si trabajamos un poco en la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, como lo hicimos cuando llevamos la ecuación general de una parábola vertical a la forma ordinaria:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

De donde: $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = y + \frac{b^2}{4a} - c$ y finalmente llegamos a la expresión

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2}{4a} - c\right)$, que reconocemos como una parábola vertical con vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$, a la que podemos aplicar el siguiente análisis:

Si $a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$ y por lo tanto el factor $y + \frac{b^2}{4a} - c > 0$ puesto que el lado izquierdo de la expresión $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ siempre es no negativo. De $y + \frac{b^2}{4a} - c > 0$ se deduce que $y > c - \frac{b^2}{4a}$

Esto último significa que $a > 0$ implica que los puntos de la parábola tienen una ordenada mayor que la del vértice, es decir, están por arriba del vértice, lo que a su vez significa que la función se extiende ¡hacia arriba!, como se vio en la parábola. Y por lo tanto el vértice es un valor **mínimo** de la función cuadrática.

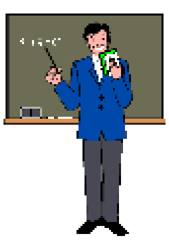
De manera que si $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un valor mínimo cuando $x = -\frac{b}{2a}$, siendo ese valor mínimo: $y_{\min} = c - \frac{b^2}{4a}$

En cambio, si $a < 0$, $\frac{1}{a} < 0$ y por lo tanto el factor $y + \frac{b^2}{4a} - c < 0$ para que el lado izquierdo de la expresión $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ se conserve no negativo. De $y + \frac{b^2}{4a} - c < 0$ se deduce que $y < c - \frac{b^2}{4a}$.

Lo que significa que los puntos de la parábola tienen una ordenada menor que la del vértice, es decir, la función se extiende ¡hacia abajo!, como ocurrió en la parábola. Por lo tanto el vértice es un valor **máximo** de la función cuadrática.

De manera que si $a < 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

Los valores que producen el máximo de esta función son $x = -\frac{b}{2a}$, y $y_{máx} = c - \frac{b^2}{4a}$



Sugerencia para quien imparte el curso

Si las condiciones del grupo lo permiten y quien imparte el curso lo considera pertinente, se puede continuar con el análisis que hemos iniciado.

Hemos visto cómo, analizando la función cuadrática, hemos arribado a resultados similares a los obtenidos al estudiar la parábola vertical, lo que por cierto, da respuesta a la pregunta con que iniciamos esta sección.

Este análisis comparativo puede llegar más lejos.

Revisando la ecuación de una parábola vertical como función cuadrática, podemos determinar los intervalos donde la función es positiva y donde es negativa, lo que equivale a saber dónde la parábola está arriba del eje X y dónde está abajo. Así como los puntos donde la parábola corta al eje X, que corresponden a los ceros de la función, que a su vez son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

Una vez calculadas y localizadas las raíces de la ecuación, lo que no representa mayor dificultad, encontraremos que $x_1 = r_1$ y $x_2 = r_2$, supongamos que $r_1 < r_2$.

1. Si $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2)$

$f(x)$ será positiva cuando el producto anterior sea positivo, y eso ocurrirá cuando se cumpla alguna de estas dos posibilidades:

i) $x - r_1 > 0$ y $x - r_2 > 0$, lo que a su vez implica que: $x > r_1$ y $x > r_2$ pero como $r_1 < r_2$, cumpliéndose $x > r_2$ automáticamente se cumple $x > r_1$, por tanto $f(x)$ es positiva en el intervalo (r_2, ∞).

ii) $x - r_1 < 0$ y $x - r_2 < 0$, lo que a su vez implica que: $x < r_1$ y $x < r_2$ pero como $r_1 < r_2$, cumpliéndose $x < r_1$ automáticamente se cumple $x < r_2$, por tanto $f(x)$ también es positiva en el intervalo $(-\infty, r_1)$.

$f(x)$ será negativa cuando el producto $(x - r_1)(x - r_2)$ sea negativo, y eso ocurrirá cuando se cumpla alguna de estas dos posibilidades:

i) $x - r_1 > 0$ y $x - r_2 < 0$, lo que a su vez implica que: $x > r_1$ y $x < r_2$ pero como $r_1 < r_2$, lo que debe cumplirse es la desigualdad $r_1 < x < r_2$. Por tanto $f(x)$ es negativa en el intervalo (r_1, r_2).

ii) $x - r_1 < 0$ y $x - r_2 > 0$, lo que a su vez implica que: $x < r_1$ y $x > r_2$ pero como $r_1 < r_2$, es imposible cumplir ambas condiciones. Por lo tanto esta posibilidad no aporta soluciones a la desigualdad.

2. Si $a < 0$, como la parábola abre hacia abajo y si $r_1 < r_2$, $f(x)$ será positiva en el intervalo (r_1, r_2) y negativa en $(-\infty, r_1)$ y en (r_2, ∞).

3. Si $r_1 = r_2$, la función será tangente al eje X, la parábola tiene su vértice sobre el eje X.

4. Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales, la función no corta al eje X.

Ejemplo 17

Encontrar las coordenadas del punto máximo o mínimo de la función cuadrática dada en cada inciso, así como los valores de x donde esa función es positiva, negativa o cero.

1. $f(x) = x^2 - 2x - 8$, completando el trinomio cuadrado perfecto:

$y = x^2 - 2x - 8 = (x^2 - 2x) - 8 = (x^2 - 2x + 1) - 8 - 1;$

$y = (x - 1)^2 - 9; \ (x - 1)^2 = y + 9$

La parábola correspondiente a la gráfica de esta función abre hacia arriba, porque $a = 1 > 0$, por lo tanto $f(x)$ tendrá un mínimo, que es el vértice de la parábola, con coordenadas $V(1, -9)$.

Los ceros de la función son las raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0$, verificar que en efecto: $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$.

La gráfica corta al eje X en los puntos $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

Para determinar el intervalo donde la función es positiva basta con resolver la desigualdad $x^2 - 2x - 8 > 0; \ (x - 4)(x + 2) > 0$. Esta desigualdad se cumple en dos casos:

i) Si $x - 4 > 0$ y $x + 2 > 0$

$x > 4$ y $x > -2$, condiciones que se cumplen ambas sólo si $x > 4$

ii) Si $x - 4 < 0$ y $x + 2 < 0$

$x < 4$ y $x < -2$, condiciones que se cumplen ambas sólo si $x < -2$

Por lo tanto, $f(x)$ es positiva en el intervalo $(-\infty,-2)$ y en $(4,\infty)$

Para determinar el intervalo donde la función es negativa, hay que resolver la desigualdad $x^2 - 2x - 8 < 0; \ (x - 4)(x + 2) < 0$. Esta desigualdad se cumple en dos casos:

i) Si $x - 4 > 0$ y $x + 2 < 0$

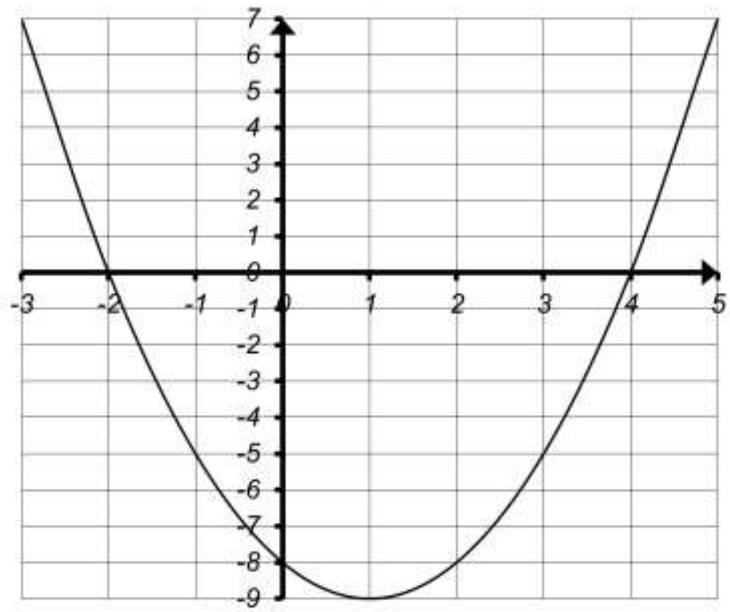
$x > 4$ y $x < -2$, imposible cumplir ambas condiciones.

ii) Si $x - 4 < 0$ y $x + 2 > 0$

$x < 4$ y $x > -2$, condiciones que se cumplen ambas sólo si $-2 < x < 4$

Por lo tanto, $f(x)$ es negativa en el intervalo $(-2,4)$.

Verificar estos resultados en la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 8$ que se muestra a continuación.



2 $f(x) = -x^2 + x - \frac{1}{4}$

$$y = -x^2 + x - \frac{1}{4} = -\left(x^2 - x\right) - \frac{1}{4}$$

$$= -\left(x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

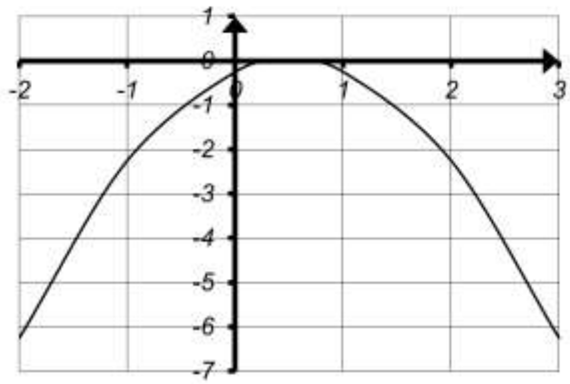
$y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ La parábola correspondiente abre hacia abajo porque $a = -1 < 0$, por lo tanto tiene un máximo con coordenadas $V\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Los ceros de la función son las raíces de la ecuación $-x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$, verificar que en efecto: $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

El único punto donde la gráfica de la función corta al eje X es $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$.

La gráfica de $f(x)$ es tangente al eje X y es negativa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$, porque $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < 0$ para $x \neq \frac{1}{2}$.

Verificar estos resultados en la gráfica de $f(x) = -x^2 + x - \frac{1}{4}$ que se muestra a continuación.



3 $f(x) = 3x^2 - 12x + 13$

$y = 3x^2 - 12x + 13 = 3(x^2 - 4x) + 13$

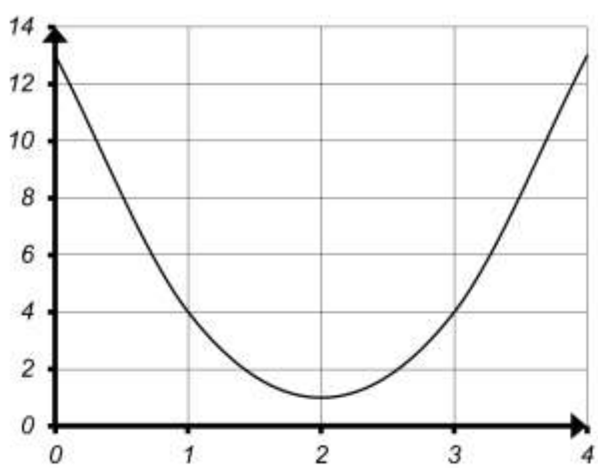
$= 3(x^2 - 4x + 2^2) + 13 - 12$

$y = 3(x - 2)^2 + 1$

Parábola que abre hacia arriba porque $a = 3 > 0$, por lo tanto tiene un mínimo con coordenadas $V(2,1)$. $f(x)$ es positiva en todo su dominio, porque $3(x - 2)^2 + 1 > 0$.

Los ceros de la función son las raíces de la ecuación $3x^2 - 12x + 13 = 0$, verificar que esta ecuación no tiene raíces reales: $x = \frac{12 \pm \sqrt{-12}}{6}$

Verificar estos resultados en la gráfica de $f(x) = 3x^2 - 12x + 13$ que se muestra a continuación.



Ejercicio 9

Encontrar las coordenadas del punto máximo o mínimo de la función cuadrática dada en cada inciso, así como los valores de x donde esa función es positiva, negativa o cero. Si se trata de una función que no corta al eje X o es tangente a él, indícalo también.

1. $f(x) = 4x^2 + 8x - 1$
2. $f(x) = - x^2 + 6x - 6$
3. $f(x) = 2x^2 + 20x + 50$
4. $f(x) = - 2x^2 - 4x - 3$
5. $f(x) = x^2 - 4$