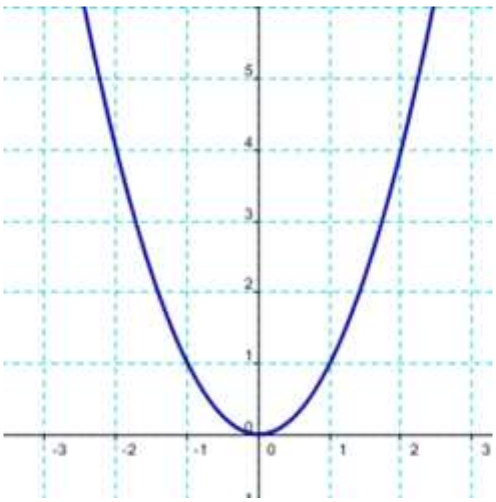
PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LA PARÁBOLA



1. El problema de "adentro o afuera"

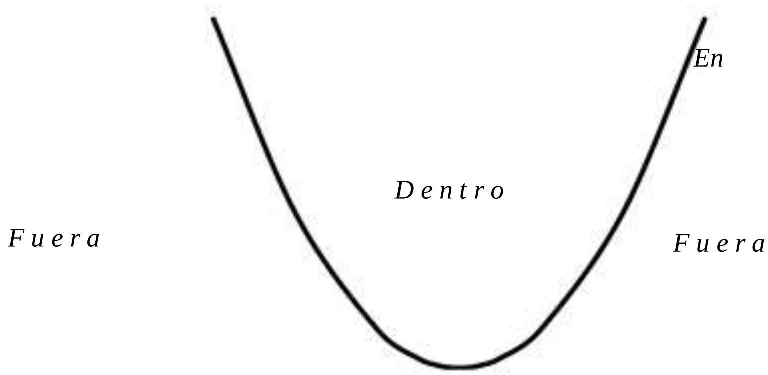
¿Puedes decir, sin ver una gráfica, si el punto ***(2,5)*** está dentro o fuera de la parábola $\boldsymbol{y = x^2}$?

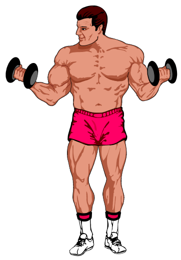
Una parábola vertical como $y = x^2$ divide al plano en tres regiones.

Describirlas

En esta unidad nos hemos interesado en los puntos que están **en** la parábola, como *(-5,25) (1,1), (3,9),* $(\sqrt{2},2), (-\sqrt{5},5)$, etc.

Sin embargo podemos considerar el conjunto de puntos que están "dentro" de la parábola como una segunda región del plano y a los que están "fuera" de la parábola como una tercera región.





Ejercicio 7

1. Trazar la gráfica de la parábola $y = x^2$

2. Localizar algunos puntos que estén en la región que definimos como dentro de la parábola y escribir sus coordenadas.

3. Deducir la relación que hay entre las coordenadas x y y que cumplen todos los puntos que están dentro de la parábola.

4. Localizar algunos puntos que estén en la región que definimos como fuera de la parábola y escribir sus coordenadas.

5. Deducir la relación que hay entre las coordenadas x y y, que cumplen todos los puntos que están fuera de la parábola.

6. Resolver el problema planteado al iniciar esta sección.

7. Deducir la relación que hay entre las coordenadas x y y, que cumplen todos los puntos que están tanto dentro como fuera de la parábola $y = -x^2$.

2. El problema de la intersección

Encontrar las coordenadas de los puntos donde la recta $x - 2y + 4 = 0$ corta a la parábola $x^2 - 2y - 2 = 0$.

¿Qué se hace para encontrar las coordenadas del punto o puntos donde se intersectan dos curvas cualesquiera?

Desde luego, resolver el sistema formado por las ecuaciones de tales curvas.

Por lo tanto tenemos que resolver el sistema formado por las ecuaciones

$x - 2y + 4 = 0$ .... (1) y $x^2 - 2y - 2 = 0$ .... (2)

De la ecuación (1) despejamos y:

$$y = \frac{x+4}{2}$$

Sustituimos y en la ecuación (2), tenemos:

$$x^2 - 2\left(\frac{x+4}{2}\right) - 2 = 0\,,$$

Eliminando el paréntesis y el denominador:

$$x^2 - 2\left(\frac{x+4}{2}\right) - 2 = 0 \qquad x^2 - \left(\frac{x+4}{1}\right) - 2 = 0 \qquad x^2 - x - 4 - 2 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

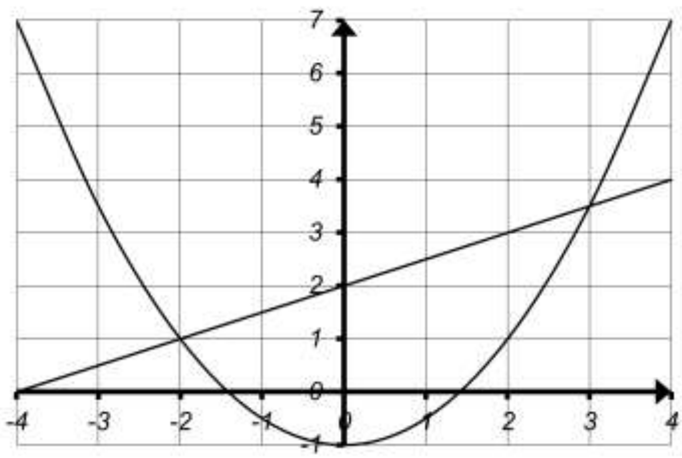
Resolviendo esta ecuación:

$x^2 - x - 6 = 0,\ x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0,$ de donde $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$

Por lo tanto:

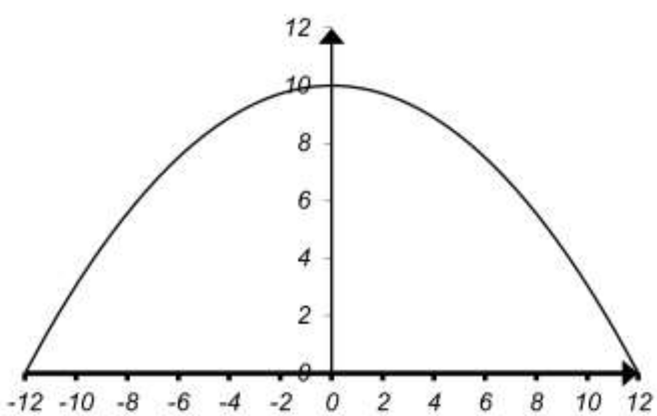
Las coordenadas de los puntos de intersección son: $P_1(-2, 1)\ y\ P_2\left(3, \frac{7}{2}\right)$

La gráfica siguiente muestra ambos lugares geométricos y los puntos de intersección, verificar los resultados:



3. El problema del túnel

Un túnel en forma de arco parabólico vertical, tiene una altura máxima de *10* metros y sus puntos de apoyo en el suelo están separados *24* metros. ¿El foco de la parábola está arriba del suelo o por debajo de él?, ¿a qué distancia del suelo se



Colocando la parábola que representa al túnel en un sistema de coordenadas, como se ilustra en la figura, vemos que su ecuación es de la forma

$(x - h)^2 = 4p\ (y - k)$ con vértice $V(0,10)$, por lo que $h = 0$ y $k = 10$.

La ecuación de esta parábola es $x^2 = 4p\,(y - 10)$

Conocemos dos puntos por donde pasa la parábola: $(-12,0)$ y $(12,0)$, por lo tanto, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación:

$$12^2 = 4p\,(0 - 10);\ \ 144 = -40\,p;\ \ p = \frac{144}{-40} = -\frac{18}{5} = -3.6$$

Entonces, el foco es el punto $F(h, k + p) = F(0,10 - 3.6) = F(0,6.4)$

Por lo tanto el foco está 6.4 metros arriba del suelo.

Ejercicio 8

1. ¿Qué condición deben cumplir los puntos que están dentro de la parábola $x^2 + 2x - y + 1 = 0$?

2. Encuentra las coordenadas de los puntos donde se cortan la recta $2x - 3y - 3 = 0$ y la parábola $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$.

3. Una antena parabólica mide $16\ m$ de ancho a una distancia de $6\ m$ del vértice, ¿qué ancho tiene esa antena a la altura del foco?

4. Un túnel en forma de arco parabólico tiene una altura máxima de $20\ m$ y un ancho de $36\ m$ en la base. ¿A qué altura de la base el túnel tiene un ancho de $18\ m$, para colocar una trabe?