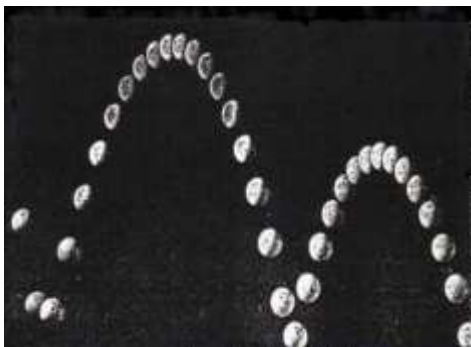


LA ECUACIÓN GENERAL DE UNA PARÁBOLA



El problema de la ecuación general de segundo grado

¿En qué casos la ecuación general de segundo grado en x y y :
 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa a una parábola?

Como vimos en la unidad anterior:

La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa a una elipse sólo si A y C son diferentes y del mismo signo.



Ejemplo 13

La ecuación $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$, corresponde a la elipse horizontal que en forma ordinaria se escribe $\frac{(x-3)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$, cuyo centro es $C(3,-1)$, con vértices $V_1(5,-1)$, $V_2(1,-1)$ y focos

$$F_1(3+\sqrt{3},-1); F_2(3-\sqrt{3},-1).$$

La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa a una circunferencia sólo si A y C son iguales.



Ejemplo 14

La ecuación $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 5 = 0$, corresponde a la circunferencia que en forma ordinaria se escribe $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 36$, cuyo centro es $C(-5,4)$ y tiene radio $6u$.

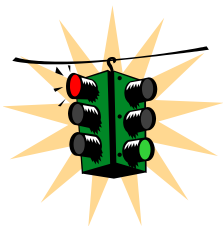
En las secciones anteriores de esta unidad obtuvimos estas ecuaciones de las parábolas:

- Horizontal con $V(h,k)$: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.
- Vertical con $V(h,k)$: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

¿Cuál es la característica de la ecuación general de segundo grado en x y y $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ que va a distinguir a una parábola de una elipse o una circunferencia?

Efectivamente, sólo va a aparecer uno de los términos de segundo grado. Es decir $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una parábola sólo si $A = 0$ ó $C = 0$.

Consideremos en primer lugar el caso en que $A = 0$ y $C \neq 0$:



Conceptos clave

18 La expresión $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, corresponde a la ecuación de una parábola horizontal dada en forma general.

¿Cómo se relacionan las constantes C , D , E y F que aparecen en la forma general de la ecuación con los parámetros h , k y p que aparecen en la ecuación ordinaria?

Para contestar esta pregunta:

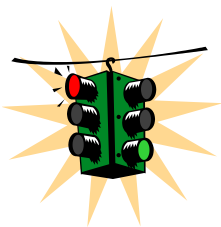
Dividimos la ecuación entre C y completamos un trinomio cuadrado perfecto para llevar esta ecuación de la forma general a la forma ordinaria, como lo hicimos para la elipse y la circunferencia:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad y^2 + \frac{D}{C}x + \frac{E}{C}y + \frac{F}{C} = 0$$

$$y^2 + \frac{E}{C}y = -\frac{D}{C}x - \frac{F}{C} = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{F}{D}\right);$$

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \left(\frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{F}{D}\right) + \frac{E^2}{4C^2} = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{F}{D} - \frac{E^2}{4CD}\right)$$

$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{4CF - E^2}{4CD}\right)$. Ecuación que corresponde a una parábola horizontal, expresada en forma ordinaria.



Conceptos clave

19 Cuando expresamos en forma general la ecuación de una parábola horizontal con vértice fuera del origen, las coordenadas del vértice son $h = -\frac{4CF - E^2}{4CD}$ y $k = -\frac{E}{2C}$; además $4p = -\frac{D}{C}$ ó $p = -\frac{D}{4C}$.



Ejemplo 15

Dada la parábola horizontal $y^2 - 6x - 8y - 2 = 0$, encontrar las coordenadas del vértice, del foco y bosquejar su gráfica.

En este momento tenemos dos formas de proceder para resolver el problema planteado:

1^a. Llevar esta ecuación de la forma general a la ordinaria y en ésta identificar los parámetros h , k y p . O bien

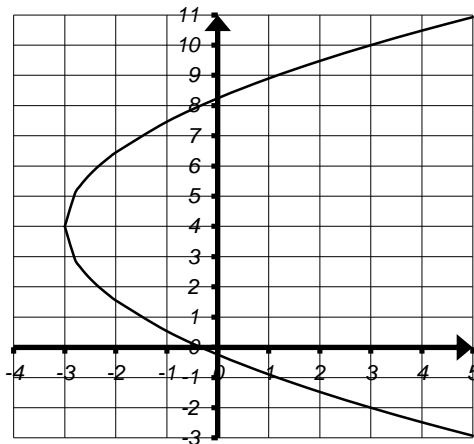
2^a. Utilizar la analogía que acabamos de establecer y obtener directamente de la ecuación general los parámetros h , k y p que determinan a la parábola.

Hagámoslo a partir de la segunda forma de proceder.

De acuerdo con el concepto clave 19 y dado que: $C = 1$, $D = -6$, $E = -8$ y $F = -2$, por lo tanto, verificar la exactitud de los cálculos,

$$h = -\frac{4CF - E^2}{4CD} = -\frac{4(1)(-2) - (-8)^2}{4(1)(-6)} = -3; k = -\frac{E}{2C} = -\frac{-8}{2(1)} = 4 \text{ y}$$

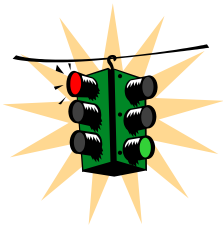
$p = -\frac{D}{4C} = -\frac{-6}{4(1)} = 1.5$; de donde $V(-3,4)$, $F(-1.5,4)$ y su gráfica se ve así, localizar en ella vértice y foco:



Ejercicio 5

Resolver el ejemplo anterior procediendo de acuerdo a la primera forma de abordarlo, llevando la ecuación dada a la forma ordinaria y verificando la igualdad de resultados.

Consideremos ahora el caso en que $C = 0$ y $A \neq 0$:



Conceptos clave

20 La expresión $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, corresponde a la ecuación de una parábola vertical dada en forma general.

¿Cómo se relacionan las constantes A , D , E y F que aparecen en la forma general de la ecuación con los parámetros h , k y p que aparecen en la ecuación ordinaria?

Nuevamente dividimos entre A y completamos un trinomio cuadrado perfecto para llevar esta ecuación de la forma general a la forma ordinaria:

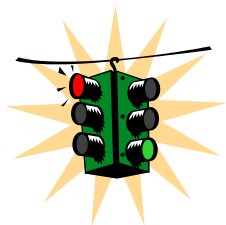
$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

$$x^2 + \frac{D}{A}x = -\frac{E}{A}y - \frac{F}{A} = -\frac{E}{A}\left(y + \frac{F}{E}\right);$$

$$x^2 + \frac{D}{A}x + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}\left(y + \frac{F}{E}\right) + \frac{D^2}{4E^2} = -\frac{E}{A}\left(y + \frac{F}{E} - \frac{D^2}{4AD}\right)$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}\left(y + \frac{4AF - D^2}{4AE}\right).$$

Ecuación que corresponde a una parábola vertical, expresada en forma ordinaria.



Conceptos clave

21 Cuando expresamos en forma general la ecuación de una parábola vertical con vértice fuera del origen, las coordenadas del vértice son

$$h = -\frac{D}{2A}, \quad k = -\frac{4AF - D^2}{4AE} \quad \text{o} \quad k = \frac{D^2 - 4AF}{4AE} \quad \text{y} \quad 4p = -\frac{E}{A} \quad \text{ó} \quad p = -\frac{E}{4A}.$$



Ejemplo 16

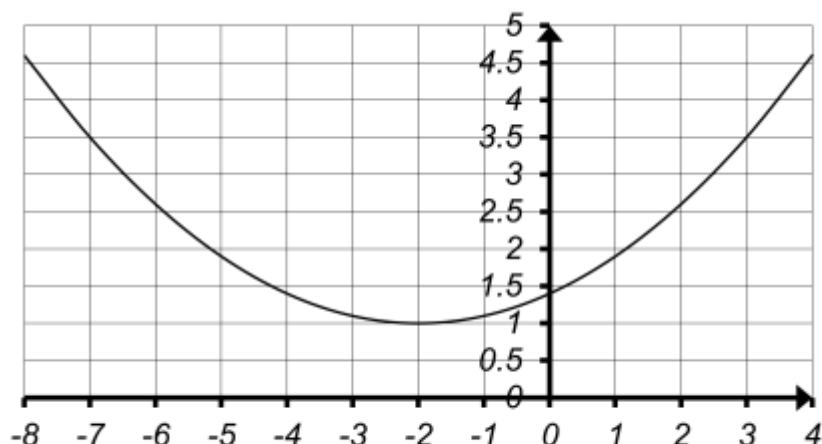
Dada la parábola vertical $x^2 + 4x - 10y + 14 = 0$, encontrar las coordenadas del vértice, del foco y bosquejar su gráfica.

Nuevamente optamos por utilizar las relaciones encontradas entre las constantes A , D , E y F con los parámetros h , k y p .

De acuerdo con el concepto clave 19 y dado que: $A = 1$, $D = 4$, $E = -10$ y $F = 14$, por lo tanto, también ahora verifica los cálculos,

$$h = -\frac{D}{2A} = -\frac{4}{2(1)} = -2; \quad k = -\frac{4AF - D^2}{4AE} = -\frac{4(1)(14) - 4^2}{4(1)(-10)} = 1 \quad \text{y} \quad p = -\frac{E}{4A} = -\frac{-10}{4(1)} = 2.5$$

De donde $V(-2, 1)$, $F(-2, 3.5)$ y su gráfica se muestra a continuación. Localizar en ella los elementos obtenidos.



Ejercicio 6

1. Resolver el ejemplo anterior procediendo de acuerdo a la primera forma de abordarlo, llevando la ecuación dada a la forma ordinaria y verificando la igualdad de resultados.

2. Llevar a la forma ordinaria las siguientes parábolas, para cada una de ellas dar las coordenadas del vértice, del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y bosquejar su gráfica.

a) $x^2 - 10x - 20y + 145 = 0$

b) $y^2 + 3x + 16y + 61 = 0$

c) $y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

d) $x^2 - 14y + 14 = 0$

e) $3x^2 + 24x - 24y + 96 = 0$

f) $5y^2 - 3x - 30y + 42 = 0$

3. Llevar a la forma general las siguientes parábolas dadas en forma ordinaria, para cada una de ellas dar las coordenadas del vértice, del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

a) $(x - 9)^2 = 5(y + 3)$

b) $(y + 4)^2 = 2(x - 7)$

c) $y^2 = 16(x + 5)$

d) $(x - 8)^2 = -7y$

e) $x^2 = \frac{8}{5}(y + 2)$