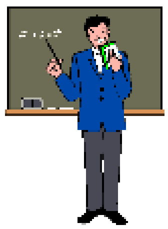
CIRCUNFERENCIA A PARTIR DE LA ELIPSE



Sugerencias para quien imparte el curso

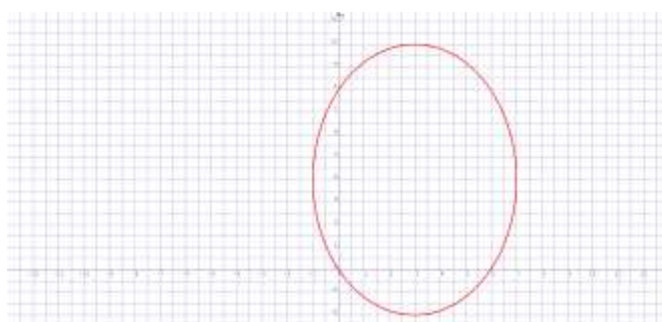
Sugerimos lleve a cabo un procedimiento como el siguiente, permitiendo que los alumnos hagan operaciones y grafiquen cada una de las elipse que se van obteniendo, de modo que deduzcan qué sucede con la gráfica y la ecuación de la elipse conforme los focos se aproximan al centro.

1. Considerar la elipse cuya ecuación es $36(x-3)^2+16(y-4)^2=576$ o escrita en forma ordinaria es $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{36}=1$

Como hemos visto en ejemplos y ejercicios anteriores, sus semiejes miden

$a=6$ y $b=4$ por lo tanto su distancia focal $c=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}\approx 4.4721$

El centro de esta elipse es $C(3,4)$ y su gráfica es:

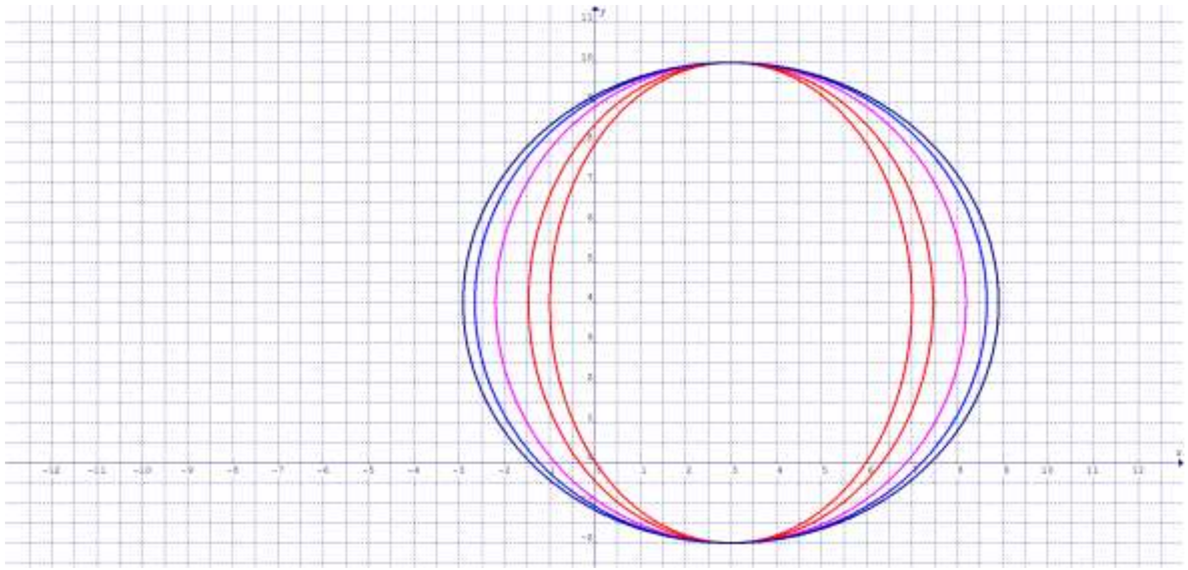


Muy importante para lo que sigue: mantener el centro en la misma posición y el valor de $a = 6$ como fijo, e ir reduciendo el valor de c.

Calcular en cada caso el valor de b, escribir la nueva ecuación y obtener la gráfica de la curva

2. Tomar ahora $c = 4$ (es menor al valor inicial)
3. Tomar $c = 3.5$
4. Tomar $c = 3$
5. Tomar $c = 2$
6. Tomar $c =1$
7. Tomar $c = 0.5$
8. Tomar $c = 0$

Si colocáramos las gráficas en el mismo plano se debe apreciar lo siguiente:



No debe ser difícil pensar en que a medida que la distancia entre los focos de una elipse se va reduciendo, la elipse se va pareciendo cada vez más a una circunferencia.

Las ecuaciones correspondientes al procedimiento anterior son:

$$36(x-3)^2+16(y-4)^2=576,\ a=6,\ b=4,\ c=\sqrt{20}$$

$$36(x-3)^2+20(y-4)^2=720,\ a=6,\ b=\sqrt{20},\ c=4$$

$$36(x-3)^2+27(y-4)^2=972,\ a=6,\ b=\sqrt{27},\ c=3$$

$$36(x-3)^2+32(y-4)^2=1152,\ a=6,\ b=\sqrt{32},\ c=2$$

$$36(x-3)^2+35(y-4)^2=1260,\ a=6,\ b=\sqrt{35},\ c=1$$

$$36(x-3)^2+35.75(y-4)^2=1287,\ a=6,\ b=\sqrt{35.75},\ c=0.5$$

$$36(x-3)^2+36(y-4)^2=1296,\ a=6,\ b=6,\ c=0$$

Si dividimos esta última ecuación entre *36*, se puede escribir como:

$$(x-3)^2+(y-4)^2=36$$

Sugerencias para quien imparte el curso

El procedimiento también se puede llevar a cabo utilizando el método del jardinero. Los alumnos o el profesor usan una tabla y en ella marcan un eje horizontal. Colocan en los extremos de una cuerda dos clavos y los fijan en dos puntos sobre el eje marcado en la tabla de modo que puedan trazar con un lápiz una elipse.

Más adelante acercan cada vez más los puntos donde fijan los clavos y trazan la curva correspondiente y poco a poco van acercando más y más esos puntos. Preguntar a los alumnos qué se está obteniendo con este procedimiento

Cuando esto termina, los focos y el centro de la elipse son un mismo punto que se llamará centro, pero ahora de la circunferencia la cual se puede dibujar usando un compás.

¿Qué información se necesita para dibujar una circunferencia?

Si deseamos dibujar una circunferencia es necesario conocer el centro para saber dónde va a quedar ubicada y su radio para conocer el tamaño de la circunferencia.

Por lo tanto, los elementos que determinan una circunferencia son el ***centro*** *y el* ***radio****, a partir de ellos, con el compás se va formando una figura donde el conjunto de puntos que describe el compás siempre están a la misma distancia del centro, que es un punto fijo, de aquí que podemos decir que la siguiente es una definición para la circunferencia.*

Definición. La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos en el plano que equidistan de un punto interior fijo, llamado centro.

Problema

Determinar la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el punto $C(-4, 2)$ y mide de radio $r = 4$ *unidades.*

Para poder resolver este problema es necesario conocer la ecuación ordinaria de una circunferencia, la que podemos conocer a partir de la ecuación ordinaria de la elipse horizontal con centro $C(h,k)$ que es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

De esta ecuación ordinaria de la elipse, que tiene su eje mayor paralelo al eje de las X, podemos ver que si hacemos que $a = b$, es decir, hacemos que los semiejes mayor y menor sean del mismo tamaño, como corresponde a una circunferencia, entonces $a^2 = b^2$ es decir la ecuación toma la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

que se puede expresar, eliminando el denominador, como:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

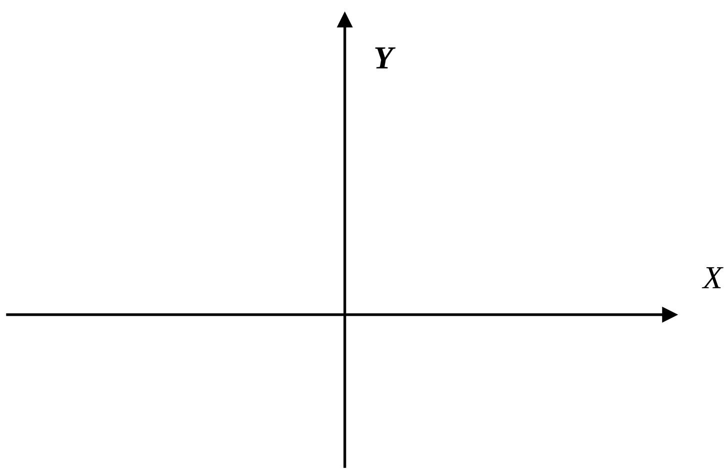
Puesto que a y b son iguales y estamos hablando de una circunferencia, entonces podemos llamarle r en lugar de a y escribir nuestra ecuación como :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Que es la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r.

Con respecto al ejercicio planteado, el centro es $C(-4, 2)$ y el de radio $r = 4$

Podemos dibujarla con regla y compás en un sistema de coordenadas.



Se puede notar que si el centro está en el origen de un sistema de coordenadas entonces $h = 0$ y $k = 0$ por lo tanto:

La ecuación de un circunferencia con centro en el origen es $x^2 + y^2 = r^2$

Ejemplo 7

Determinar la ecuación de la circunferencia de centro $C(5,-2)$ y pasa por el punto $P(-1,5)$

Se tienen en este ejemplo las coordenadas del centro y un punto de la circunferencia buscada, por lo tanto el valor del radio será:

Usando distancia entre dos puntos

$$r = CP = \sqrt{(5+1)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

Sustituyendo en nuestra ecuación cartesiana de la circunferencia:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ tendremos lo siguiente $(x-5)^2 + (y+2)^2 = \sqrt{85}^2$

o sea: $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 85$

Ejemplo 8

Determinar la ecuación de la circunferencia sabiendo que uno de sus diámetros es el segmento que tiene por extremos los puntos $A(5, -1)$ y $B(-3, 7)$

Como conocemos los puntos extremos de uno de sus diámetros, necesitamos encontrar el centro de la circunferencia, que es el punto medio del diámetro:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{es decir}$$

$$x = \frac{5+(-3)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Entonces el centro tiene de coordenadas $C(1, 3)$, para encontrar el radio deberemos calcular la distancia del centro a uno de los extremos del diámetro:

$$CP = \sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2}$$

Donde P es cualquiera de los puntos extremos A o B es decir calculamos CA o CB

$$r = CA = \sqrt{(1-5)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

Sustituyendo en nuestra ecuación cartesiana de la circunferencia tendremos:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ es decir $(x-1)^2 + (y-3)^2 = \sqrt{32}^2$

O sea que la ecuación de la circunferencia es $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 32$

Ejercicio 4

Encontrar centro y radio de las circunferencias:

1. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$

1. $(x+4)^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{4}$

2. $x^2 + (y-2)^2 = 16$

3. $(x-5)^2 + y^2 = 4$

4. $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 0$

Determinar la ecuación de la circunferencia para los siguientes casos:

1. Centro en el punto $C(4, -3)$ y radio $r = 5$
2. Centro en el punto $C(-6, 4)$ y radio $r = 7$
3. Centro en el punto $C(-2, 2)$ y pasa por el punto $A(5, -1)$
4. Uno de sus diámetros es el segmento de recta que une los puntos $A(4, 2)$ y $B(-2, -4)$
5. Centro en el punto $C(-4, -5)$ y es tangente al eje X