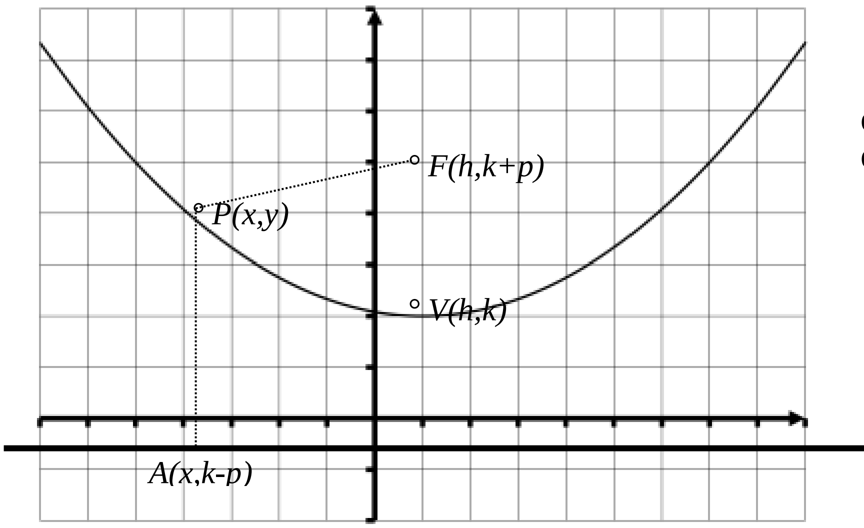
ECUACIÓN CARTESIANA DE UNA PARÁBOLA VERTICAL CON VÉRTICE FUERA DEL ORIGEN

El problema de rotar una parábola horizontal 90°

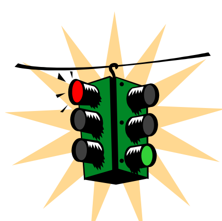
¿Qué modificaciones sufrirá la ecuación de una parábola horizontal con vértice en $V(h, k)$, $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, si se coloca en el sistema coordenado, de manera que su eje focal sea paralelo al eje *Y*?



Sólo ha cambiado la posición de la parábola, no sus características.

Ahora las coordenadas del foco son $F(h, k + p)$.
La directriz es una recta paralela al eje X, su ecuación es $y = k - p$.

Nuevamente se cumple que: $PF = PA$, sustituyendo los elementos conocidos, desarrollando los binomios al cuadrado y simplificando las expresiones, obtenemos: $(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$



Conceptos clave

15. La ecuación que cumplen todos los puntos del plano cartesiano que forman una parábola con vértice en el punto $V(h, k)$ y eje focal paralelo al eje Y, a la que llamaremos **vertical**, es: $(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$.

16. El foco tiene coordenadas $F(h, k+p)$, su directriz es la recta horizontal $y = k - p$ y la longitud de su lado recto es: $L.R. = |4p|$.

17. Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba. Y

Si $p < 0$ la parábola abre hacia abajo.

Ejemplos

10 Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el punto $V(1,2)$, eje focal paralelo al eje Y y foco $F(1,5)$

Según los conceptos clave 15 y 16, la ecuación de este tipo de parábolas es $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$ y su foco $F(h, k+p)$.

En nuestro ejemplo, $h = 1, k = 2$ y $p = 3$, de donde $(x-1)^2 = 4(3)(y-2)$; por lo que la ecuación buscada es: $(x-1)^2 = 12\,(y-2)$.

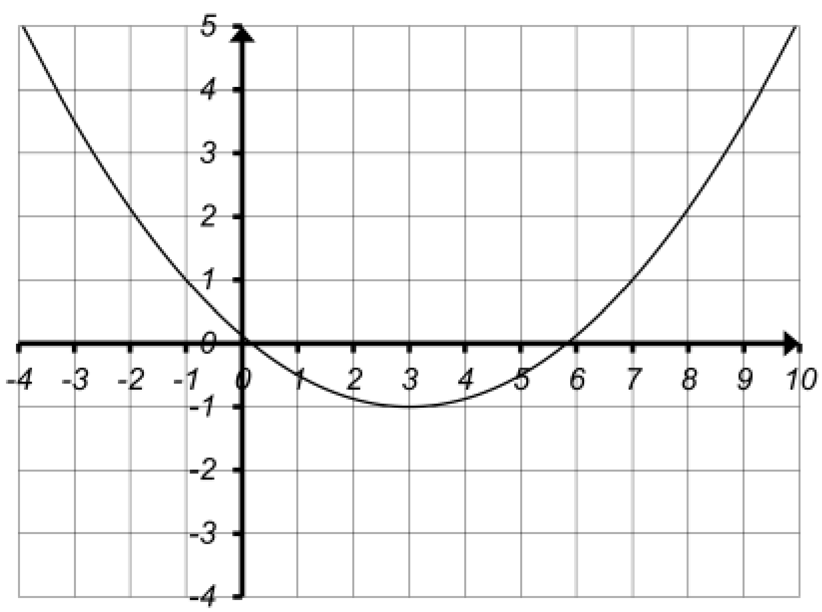
La gráfica de esta parábola corresponde a la que se utilizó para deducir la ecuación, verificar cada uno de los valores en la gráfica mostrada al principio de esta sección.

11 Obtener las coordenadas del foco y del vértice, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y bosquejar la gráfica de la parábola $(x-3)^2 = 8(y+1)$

La ecuación de esta parábola es de la forma $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$, aplicando el concepto clave 15 sabemos que $h = 3, k = -1$ y $4p = 8, p = 2$.

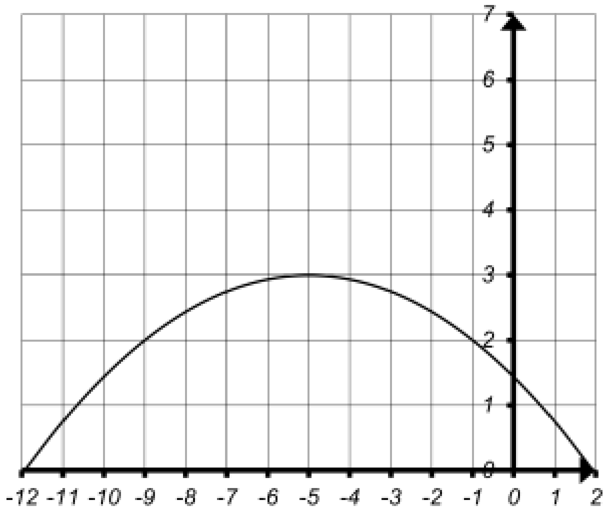
Por lo tanto su vértice es el punto $V(3,-1)$, su foco es $F(3,1)$. $L.R = |4(2)| = 8u$, la ecuación de su directriz es $y = -3$

Localizar en la siguiente gráfica los elementos obtenidos para la parábola.

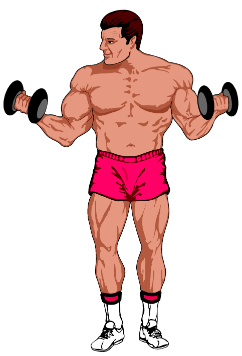


12 Obtener las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y bosquejar la gráfica de la parábola $(x + 5)^2 = -16\,(y - 3)$

$h = -5,\ k = 3,\ 4p = -16;\ \ p = -4;\ \ V(-5,3),\ F(-5,-1),\ \ dir\ y = 7,\ \ L.R. = 16\ u$



Localizar en esta gráfica los elementos obtenidos de la parábola.



Ejercicio 4

Encontrar la ecuación de la parábola que cumple las condiciones dadas en cada ejercicio:

1. Tiene vértice $V(-3,4)$ y foco $F(-3,0)$
2. Tiene vértice $V(-3,0)$ y foco $F(-3,4)$
3. Tiene como directriz a la recta $y = 0$ y su vértice es $V(2,-5)$

Obtener las coordenadas del vértice, del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y bosquejar la gráfica de las siguientes parábolas:

4. $(x + 2)^2 = 6(y + 2)$
5. $(x - 5)^2 = -10(y + 4)$

En resumen:

	Parábola horizontal	Parábola vertical
Eje focal	Paralelo al eje X	Paralelo al eje Y
Vértice	$V(h,k)$	$V(h,k)$
Foco	$F(h + p, k)$	$F(h, k + p)$
Ecuación	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$
Directriz	$x = h - p$	$y = k - p$
Lado Recto	$\lvert 4p \rvert$	$\lvert 4p \rvert$
Si $p > 0$	Abre hacia la derecha	Abre hacia arriba
Si $p < 0$	Abre hacia la izquierda	Abre hacia abajo

Observar que las ecuaciones estudiadas cuando la parábola tiene vértice en el origen: $y^2 = 4px$ y $x^2 = 4py$ son casos particulares de las obtenidas cuando el vértice es $V(h, k)$.