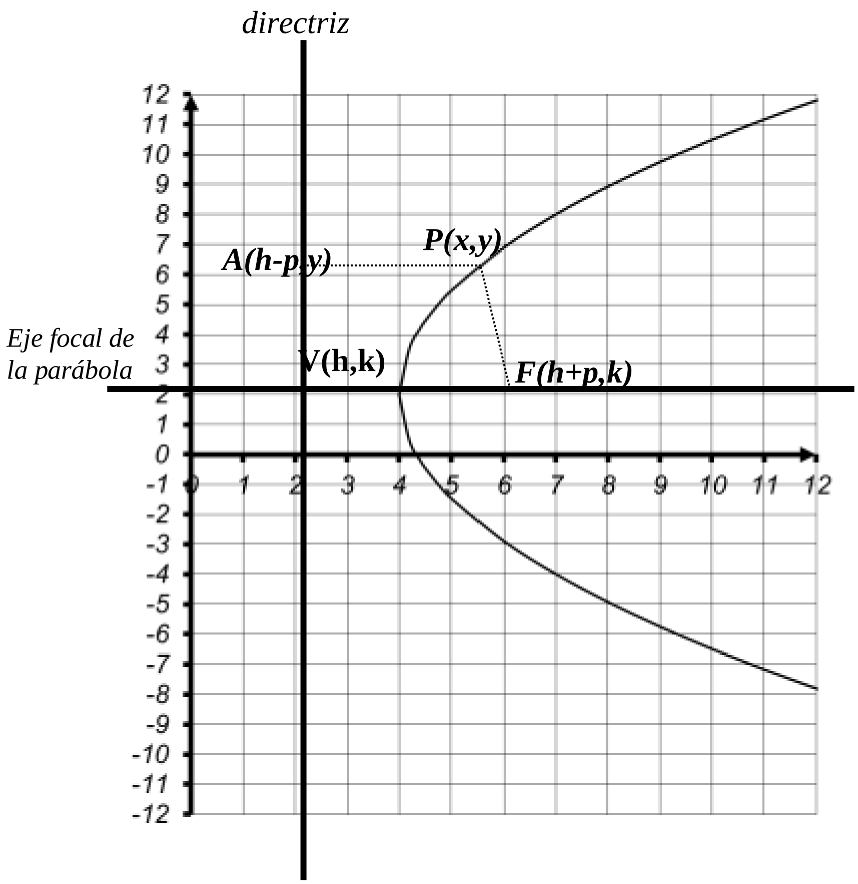
ECUACIÓN CARTESIANA DE UNA PARÁBOLA HORIZONTAL CON VÉRTICE FUERA DEL ORIGEN

El problema del traslado de una curva

¿Qué modificaciones sufrirá la ecuación de una parábola horizontal con vértice en el origen, $y^2 = 4px$, si se coloca en el sistema coordenado, de manera que su vértice sea un punto cualquiera $V(h,k)$?



Ahora el foco tendrá coordenadas

$$F(h+p,k)$$

Por ser una recta vertical, la ecuación de la directriz será:

$$x = h - p$$

Si suponemos que el punto de coordenadas variables $P(x,y)$, pertenece a la parábola, debe cumplir la condición establecida por la definición:

$$PF = PA$$

Evaluando la distancia PF:

$$PF = \sqrt{[x-(h+p)]^2 + (y-k)^2}$$

Evaluando la distancia PA:

$$PA = \sqrt{(x-h-p)^2} = \\ = |x-h+p|$$

Por lo tanto: $\sqrt{[x-(h+p)]^2 + (y-k)^2} = |x-h+p|$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, para eliminar el radical y el valor absoluto obtenemos:

$$[x-(h+p)]^2 + (y-k)^2 = |x-(h-p)|^2$$

Quitando los paréntesis dentro del corchete:

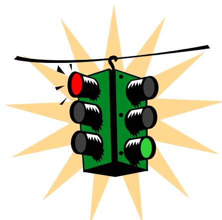
$$[x-h-p]^2 + (y-k)^2 = [x-h+p]^2$$

Efectuando el cuadrado de lo que hay dentro de los corchetes:

$$x^2 + h^2 + p^2 - 2hx - 2px + 2hp + (y-k)^2 = x^2 + h^2 + p^2 - 2hx + 2px - 2hp$$

Agrupando, simplificando términos semejantes y factorizando:

$$(y-k)^2 = 4px - 4ph; \quad \boxed{(y-k)^2 = 4p\,(x-h)}$$



Conceptos clave

12. La ecuación que cumplen todos los puntos del plano cartesiano que forman una parábola con vértice en el punto $V(h, k)$ y eje focal paralelo al eje X, a la que llamaremos **horizontal**, es: $(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$

13. El foco tiene coordenadas $F(h+p, k)$, su directriz es la recta vertical

$x = h - p$ y la longitud de su lado recto es: $L.R. = |4p|$.

14. Si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha. Y

Si $p < 0$ la parábola abre hacia la izquierda.

Ejemplos

7 Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el punto $V(4,2)$, eje focal paralelo al eje X y foco $F(7,2)$

Con base en el concepto clave 12, la ecuación de este tipo de parábolas es $(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$ y su foco tiene coordenadas $F(h+p, k)$.

En nuestro ejemplo, $h = 4, k = 2$ y $p = 3$, de donde $(y-2)^2 = 4(3)(x-4)$; por lo que la ecuación buscada es: $(y-2)^2 = 12\,(x-4)$.

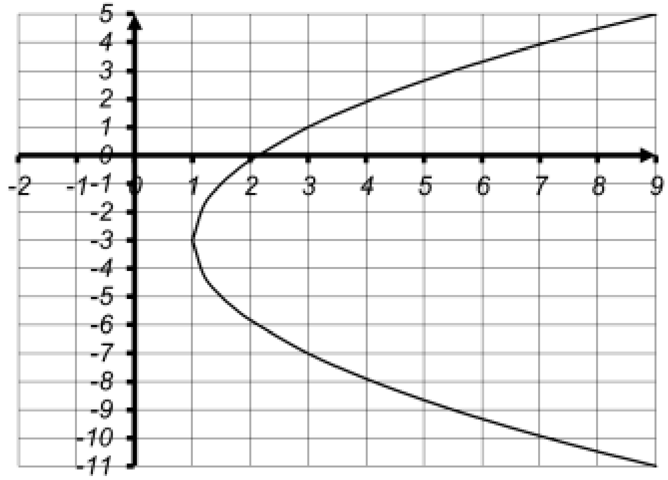
La gráfica de esta parábola corresponde a la que se utilizó para deducir la ecuación, verificar cada uno de los valores.

8 Obtener las coordenadas del foco y del vértice, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y bosquejar la gráfica de la parábola $(y+3)^2 = 8\,(x-1)$

La ecuación de esta parábola es de la forma $(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$, de acuerdo con el concepto clave 12 sabemos que $h = 1$, $k = -3$ y $4p = 8$, $p = 2$.

Por lo tanto, su vértice es el punto $V(1,-3)$, su foco es $F(3,-3)$. $L.R = |4(2)| = 8u$ y la ecuación de su directriz es $x = -1$

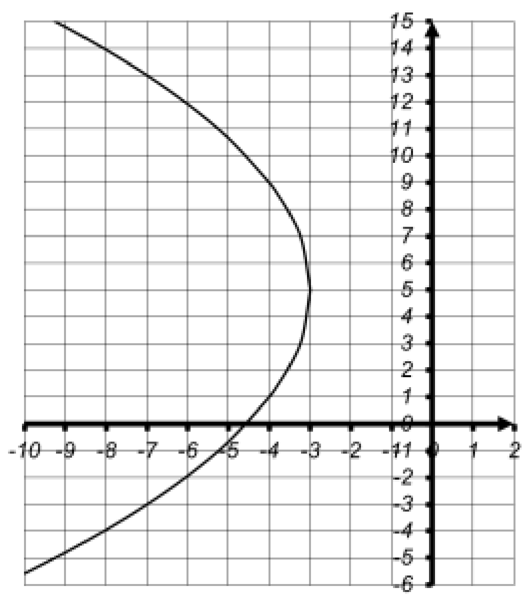
Localizar en esta gráfica los elementos de la parábola analizada.



9 Obtener las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y bosquejar la gráfica de la parábola $(y - 5)^2 = -16\,(x + 3)$

Solución: $h = -3$, $k = 5$, $4p = -16$, $p = -4$; $V(-3,5)$, $F(-7,5)$, dir $x = 1$, $L.\,R. = 16\ u$

Localizar en la gráfica siguiente los elementos de la parábola.



Ejercicio 3

Encontrar la ecuación de la parábola que cumple las condiciones dadas en cada ejercicio:

1. Tiene vértice $V(-3, 4)$ y foco $F(0, 4)$
2. Tiene vértice $V(0,4)$ y foco $F(-3,4)$
3. Tiene como directriz a la recta $x = 0$ y su vértice es $V(2, -5)$

Obtener las coordenadas del vértice, del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y bosquejar la gráfica de las siguientes parábolas:

4. $(y + 2)^2 = 6(x + 2)$
5. $(y - 5)^2 = -10(x + 4)$