ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN

Si ahora colocamos la elipse horizontal con centro en el origen, observaremos que no cambian la forma ni alguna de sus características. Si teníamos como ecuación de una elipse horizontal a

$$a^2b^2 = b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 \text{ ....(1)}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ .... (2)}$$

Ellas se reducen simplemente a:

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2 \text{ ó } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La misma situación sucede con la elipse vertical, si ubicamos su centro en el origen, su ecuación se reduce a:

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ó escrita como $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$

Ejemplo 1

Encontrar la ecuación y gráfica de la elipse cuyos vértices son *V(4,0)* y *V´(-4,0),* y sus focos son los puntos *F(3,0)* y *F´(-3,0).*

Solución:

Es conveniente empezar por identificar de qué clase de elipse se trata: ¿horizontal o vertical?

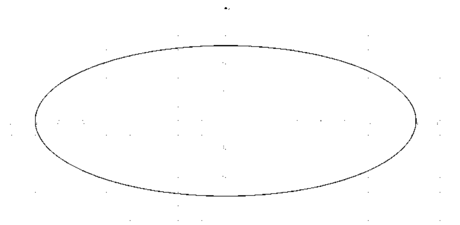
De acuerdo a la posición de los vértices y focos el eje mayor es horizontal, por tanto, la elipse es horizontal y tiene centro en el origen (punto medio entre los vértices).

De los datos de nuestro ejemplo:

$a = 4; \; c = 3; \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} \; ; \quad b = \sqrt{4^2 - 3^2} \; ; \; b = \sqrt{7}$

La ecuación de la elipse será: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

Su gráfica se muestra enseguida



Ejemplo 2

Una elipse tiene centro en el origen, uno de sus focos es *F(0,2)* y un vértice *V(0,3)*. Determinar la ecuación, su excentricidad, lado recto y gráfica.

Solución:

En este caso se trata de una elipse vertical, $a=3$, $c=2$, por lo que $b=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

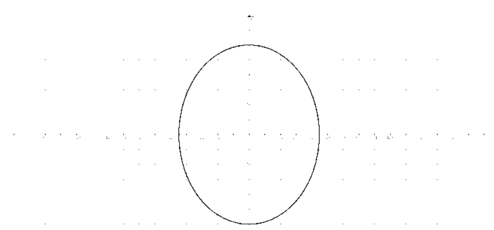
Las coordenadas del otro foco y vértice son *F´(0, -2)* y *V´(0, -3)*

La ecuación será $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ o $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$

La excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$

La longitud del lado recto es $l.r.=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

Su gráfica es



Ejemplo 3

Dada la ecuación de la elipse $9x^2+25y^2=225$. Encontrar las coordenadas de los vértices, de los focos, la longitud de los ejes mayor y menor, la excentricidad, la longitud de los lados rectos y bosquejar su gráfica.

Solución:

Lo primero que debemos hacer es llevar la ecuación a la forma ordinaria, es decir igualarla a uno. Para eso la dividimos entre *225*:

$$\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=\frac{225}{225}$$

Simplificando las fracciones tenemos: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, que corresponde a una elipse horizontal de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

De la que sabemos sus vértices tienen coordenadas *V(-a,0)* y *V´(a,0),* sus focos *F-(c,0)* y *F´-c,0),* longitud del eje mayor = *2a,* longitud del eje menor = *2b*, $e=\frac{c}{a}$ y lado recto = $\frac{2b^2}{a}$.

A continuación determinamos el valor de cada una de las constantes *a, b* y *c* para esta elipse particular.

$a^2 = 25;\ a = 5$

$b^2 = 9;\ b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2;$

$c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

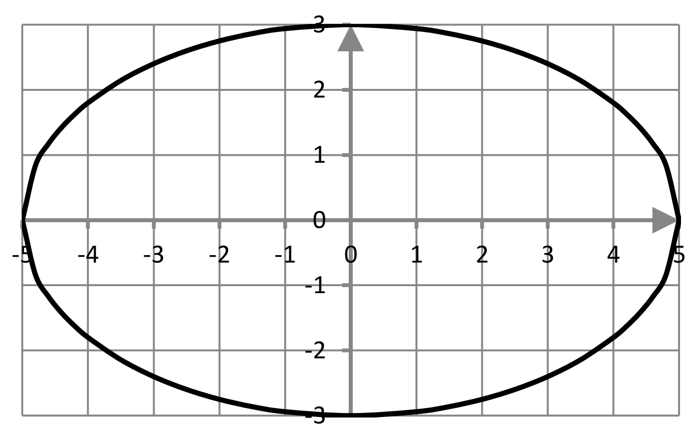
Con lo que los vértices son *V(-5,0)* y *V´(5,0),*

sus focos *F(-4,0)* y *F´(4,0),*

eje mayor = *10u*, eje menor = *6u,*

$e=\frac{4}{5}$ y lado recto = $\frac{2(3)^2}{5}=\frac{18}{5}$

La gráfica puede bosquejarse localizando en el sistema de coordenadas cartesianas los vértices, focos, los extremos del eje menor. Sobre cada foco encontrar los extremos del lado recto. De esta manera tendremos ocho puntos que pueden darnos una idea aproximada de la curva, cuidando de redondear suavemente el trazo, de manera que la curva no tenga puntas ni quiebres bruscos.



Ejemplo 4

Hagamos el mismo análisis para la elipse cuya ecuación es $\boldsymbol{4x^2 + y^2 = 16}$.

Solución:

Dividamos la ecuación entre 16

$$\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{16}{16}$$

Simplificando las fracciones tenemos:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

Esta ecuación corresponde a una elipse vertical

Sabemos que para este tipo de elipse: sus vértices tienen coordenadas *V(0,a)* y *V´(0,-a),* sus focos *F(0,c)* y *F´(0,-c),* eje mayor = $2a$, eje menor = $2b$, $e=\frac{c}{a}$ y lado recto = $\frac{2b^2}{a}$.

A continuación determinamos el valor de cada una de las constantes *a, b* y *c* para esta elipse particular.

$a^2 = 16; a = 4$

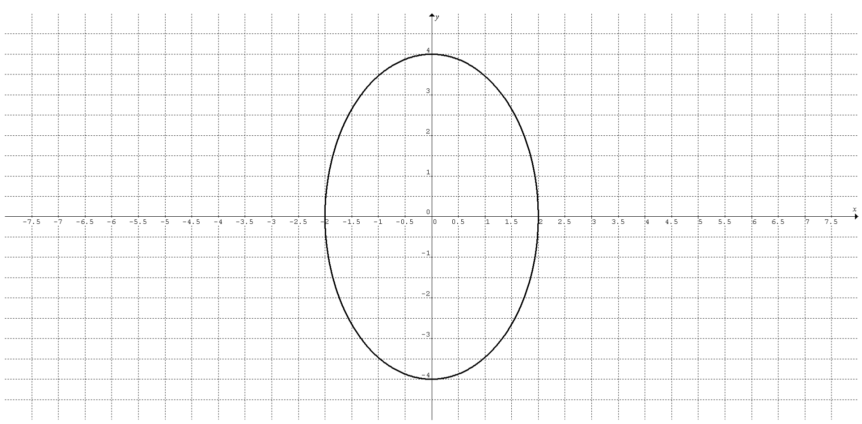
$b^2 = 4; b = 2$

$c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$

Con lo que los vértices son *V(0, 4)* y *V´(0, - 4),* sus focos $F\left(0,\sqrt{12}\right)$ y $F'\left(0,-\sqrt{12}\right)$ eje mayor = $8u$, eje menor = 4u, e= $\frac{\sqrt{12}}{4}$ y lado recto = 2 u.

La gráfica de esta elipse se ve así:

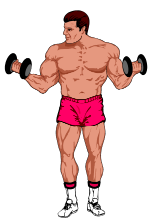


Ejercicio 1

Obtener la ecuación de la elipse con centro en el origen, que cumple las condiciones dadas en cada inciso:

1. Uno de sus vértices es el punto $(0,6)$ y uno de sus focos está en $(0,5)$.
2. Uno de sus focos es el punto $(4,0)$ y su excentricidad es $e = \frac{2}{3}$.
3. Uno de sus vértices es el punto $(0,3)$ y la longitud de su eje menor es *4* unidades.
4. Su eje focal está sobre el eje Y. Sus ejes mayor y menor miden *6* y 5 unidades respectivamente.

Su eje focal está sobre el eje X. El eje mayor mide *10* unidades y su lado recto $\frac{18}{5}$



Ejercicio 2

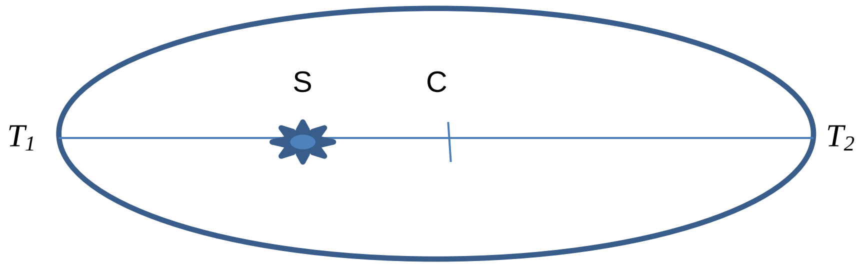
Para cada una de las siguientes ecuaciones de elipses hacer lo que se pide:

1. $9x^2 + 4y^2 = 36$
2. $36x^2 + 49y^2 = 1764$
3. $x^2 + 4y^2 = 36$
4. $8x^2 + 5y^2 = 80$

a) Llevarla a su forma ordinaria.
b) Identificar si se trata de una elipse horizontal o vertical.
c) Obtener el valor de las constantes a, b y c.
d) Escribir las coordenadas de los vértices y de los focos.
e) Determinar la longitud de los ejes mayor y menor.
f) Encontrar el valor de la excentricidad.
g) Calcular la longitud de los lados rectos, y
h) Trazar su gráfica.

Ahora estamos en condiciones de resolver el problema de la Tierra y el Sol

En la figura siguiente mostramos en T_1 la posición más cercana de la Tierra al Sol, la de distancia mínima o **perihelio**, alcanzada alrededor del *21* de junio, en el solsticio de verano para el hemisferio Norte.



Con la información proporcionada en el problema y lo que ahora sabemos de la elipse:

Longitud del eje mayor = $2a$ = *300 000 000 km*. Por lo que la distancia a del centro a cualquiera de los vértices es a = *150 000 000 km*.

La excentricidad de la órbita es $e = \frac{1}{62} = \frac{c}{a}$, de donde $c = \frac{a}{62}$, recuerda que c es la distancia del centro a cualquiera de los focos.

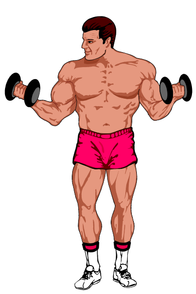
$$c = \frac{150\,000\,000}{62} = 2\,419\,354.839\ km.$$

La distancia mínima será $a - c$ = *150 000 000 – 2 419 355 = 147 580 645 km*.

En T_2 mostramos la posición más alejada de la Tierra al Sol, la de distancia máxima o **afelio**, alcanzada alrededor del *22* de diciembre, en el solsticio de invierno para el hemisferio Norte.

La distancia máxima será $a + c$ = *150 000 000 + 2 419 355 = 152 419 355 km*.

Ejercicio 3



1. Observar la relativamente pequeña diferencia entre las distancias máxima y mínima de la Tierra al Sol, ¿qué significa eso desde el punto de vista geométrico?
2. Expresar esa diferencia como un porcentaje de la distancia media.
3. Investigar la información necesaria y hacer el mismo cálcu-

lo pedido en el problema de la Tierra y el Sol para Plutón, en una época planeta del Sistema Solar más alejado del Sol, que tiene una órbita muy excéntrica.