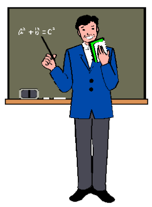
Lugares Geométricos

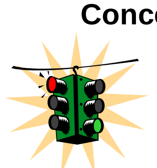
El tema de lugares geométricos tiene, entre otros objetivos, en primer lugar que el alumno comprenda la relación existente entre la geometría analítica y las correspondientes representaciones algebraicas; en segundo lugar se familiarice con la localización en el plano de puntos que satisfacen una ecuación ya sea ésta de 1er., 2º., o grado mayor y conozca diferentes condiciones geométricas que dan lugar a ecuaciones algebraicas.



Sugerencia para quien imparte el curso

Recomendamos iniciar con ejemplos como los siguientes donde se proporciona una o varias condiciones geométricas y se debe de obtener la gráfica y la representación algebraica correspondiente, de modo que el alumno inicie a establecer la correspondencia entre una condición geométrica, la gráfica y la representación algebraica.

Concepto clave 9



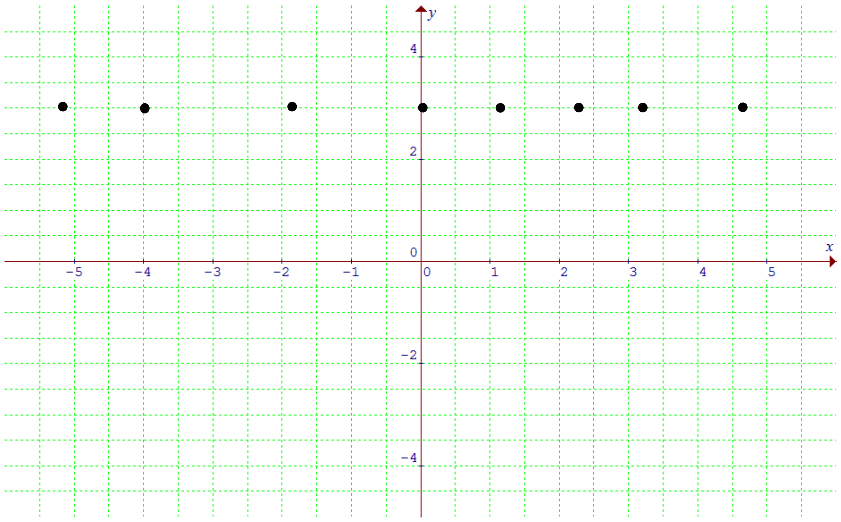
“La idea central de la geometría analítica es la correspondencia entre una ecuación y el lugar geométrico (generalmente una curva) consistente de todos aquellos puntos cuyas coordenadas relativas a los ejes coordenados satisfacen aquella ecuación”.

Ejemplo 1.

Obtener el lugar geométrico y la ecuación de los puntos (x,y) que se encuentran tres unidades arriba del eje X.

Solución:

Algunos puntos que están tres unidades arriba del eje X se muestran en la gráfica siguiente y ellos, junto con todos los que cumplen esa condición, constituyen el lugar geométrico. Entonces el lugar geométrico es una línea horizontal



¿Qué tienen en común esos puntos? La ordenada de cada punto es la misma

Por consiguiente la ecuación del lugar geométrico será $y=3$

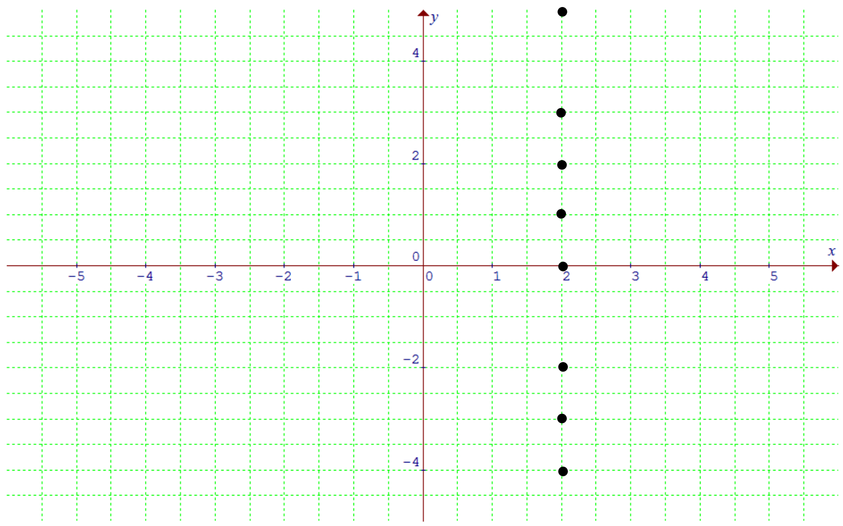
Ejemplo 2

Obtener el lugar geométrico y la ecuación de los puntos (x,y) que se encuentran dos unidades a la derecha del eje Y.

Solución:

Algunos puntos que se encuentran dos unidades a la derecha del eje Y se muestran en la gráfica siguiente, estos forman parte del lugar geométrico además todos los que cumplen esa condición.

Como se observará en la gráfica, para todos esos puntos la abscisa es igual a 2.

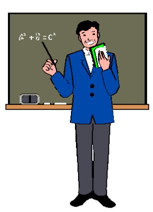


Entonces la ecuación del lugar geométrico será $x = 2$

Ejemplo 3

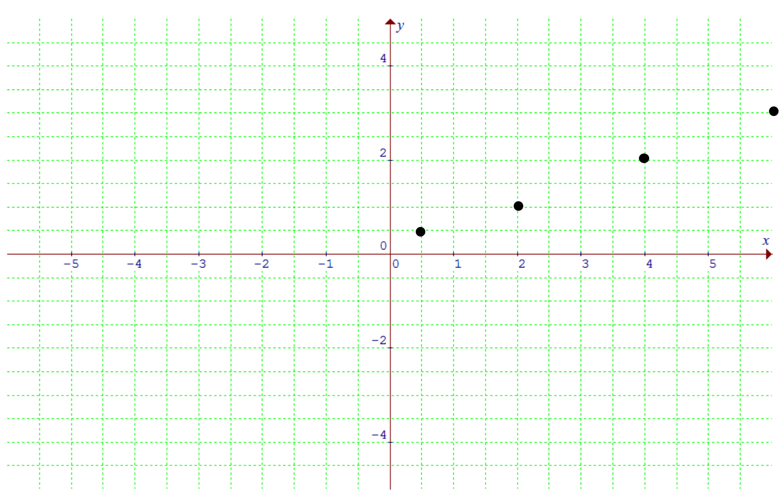
Obtener el lugar geométrico y la ecuación de los puntos (x,y) cuya abscisa es el doble de su ordenada.

Solución:



A partir de este ejemplo y hasta el número 6, sugerir a los estudiantes que propongan varias parejas de puntos que cumplan la condición que se señala, pedirles ubicar estos puntos en el plano cartesiano, preguntarles ¿cómo creen que sea el lugar geométrico? y solicitarles la ecuación resultante.

Por ejemplo las parejas serían $(2,1),(4,2),(6,3),\left(1,\frac{1}{2}\right),(-3,1.5)$ etc.



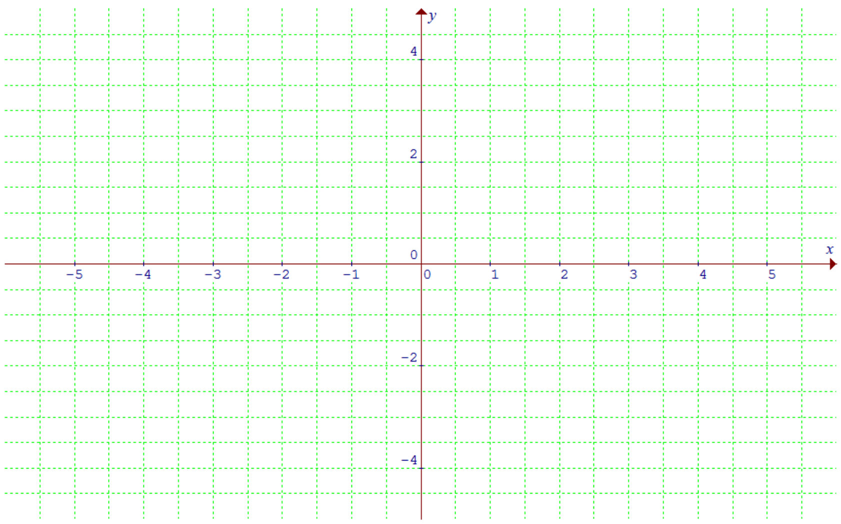
Ejemplo 4

Obtener el lugar geométrico y la ecuación de los puntos (x,y) que se mueven en el plano de modo que la suma del doble de la abscisa y el triple de la ordenada es siempre igual a 10.

Solución:

Sugiere varias parejas de puntos que cumplan la condición que se da

Ubica en el plano estos puntos y observa.



¿Cuál será la ecuación resultante?

Efectivamente $2x+3y=10$

Los ejemplos que hemos estudiado hasta ahora corresponden a líneas rectas, pero no hay solamente lugares geométricos para líneas rectas. Veamos otros ejemplos

Ejemplo 5

Obtener el lugar geométrico y la ecuación de los puntos (x,y) que se desplazan en el plano siempre a 4 unidades de distancia del origen.

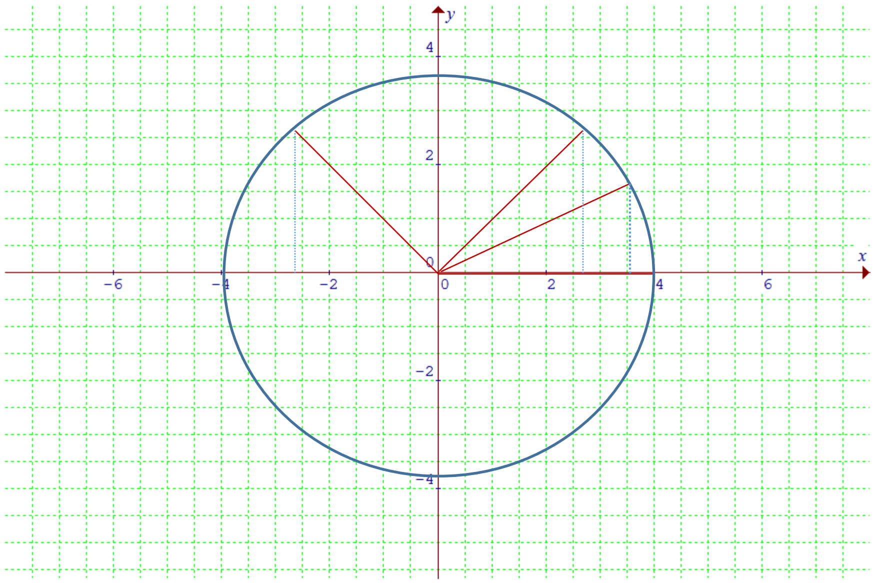
Solución:

Algunos puntos fáciles de obtener serán (4,0), (0,4), (-4,0) etc.

¿El lugar geométrico será un cuadrado?

Imagina que tuvieras un cordel, mides 4 unidades con él y colocas un extremo en el origen del plano cartesiano y lo fijas. Si mueves el otro extremo del cordel, ¿qué figura se formaría?

Observemos la figura siguiente mostrando varias posiciones del cordel



¿Qué puedes observar además?

Efectivamente, para cualquier posición que se desplace, el cordel forma un triángulo rectángulo en el cual se cumple el teorema de Pitágoras.

Por consiguiente, para obtener otros puntos debemos verificar se cumpla que la suma de los cuadrados de x y de y sea igual a 16, al utilizar el Teorema de Pitágoras. O sea, la expresión $x^2 + y^2 = 16$ o bien al despejar y quedaría $y = \sqrt{16 - x^2}$

Otros puntos serán entonces:

$$(0, \pm\sqrt{16}), (1, \pm\sqrt{15}), (2, \pm\sqrt{12}), (3, \pm\sqrt{7}), (-1, \sqrt{15}), (-2, \pm\sqrt{12})$$

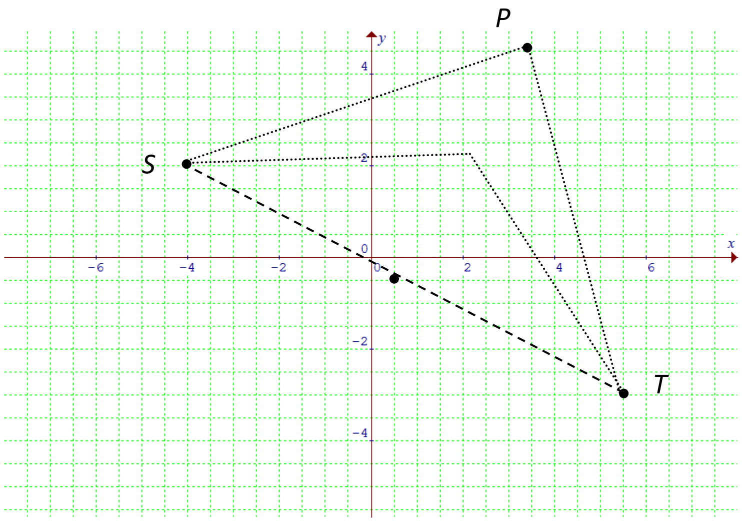
Al ubicar estos puntos en el plano se forma una circunferencia luego entonces, como la distancia de cada punto al origen es siempre igual a 4 y se cumple el Teorema de Pitágoras, la ecuación será $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 16$ o simplemente $x^2 + y^2 = 16$

Ejemplo 6

Obtener el lugar geométrico y la ecuación correspondiente de los puntos

$P(x, y)$ que junto con $S(-4, 2)$ y $T(5,-3)$ forman siempre un triángulo isósceles.

Si localizamos los puntos S y T en un sistema de coordenadas, la situación podría representarse como en la figura siguiente:



Tenemos una primera idea de cómo es el lugar geométrico pedido, para obtener ahora la expresión algebraica correspondiente, debemos utilizar la propiedad de que los puntos forman un triángulo isósceles.

Escrita en forma algebraica la condición geométrica es que $\overline{SP} = \overline{PT}$

Calcula estas distancias

$\overline{SP} = \sqrt{(x-(-4))^2 + (y-(2))^2}$ =____________________________

$\overline{PT} = \sqrt{(5-x)^2 + (-3-y)^2}$ = ________________________________

Igualamos estas distancias, pues es la condición que pide el enunciado, tendremos:

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(5-x)^2+(-3-y)^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad para eliminar las raíces, desarrolla los binomios al cuadrado.

$$x^2+8x+16+y^2-4y+4=25-10x+x^2+9+6y+y^2$$

Observamos que hay términos semejantes, los reducimos e igualamos a cero para obtener

$18x-10y-14=0$ que se puede simplificar a $9x-5y-7=0$

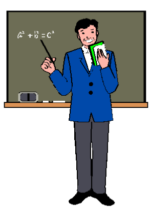
Hemos obtenido una ecuación de primer grado con dos variables x y y.

Necesitamos verificar cuáles son los puntos que forman el lugar geométrico y por el momento disponemos sólo de la ecuación algebraica.

Utilizaremos ahora dos de los criterios para obtener puntos del lugar Geométrico cuando se conoce la ecuación.

10. Puntos donde la gráfica intersecta a los ejes.

Debemos localizar en primer lugar, si hay puntos de este lugar geométrico que intersecten a los ejes.



Sugerencia para quien imparte el curso

Proporcionar la siguiente expresión a los estudiantes para verificar si están de acuerdo o en su caso discutirla con ellos.

Cualquier punto en el eje X tiene coordenadas $(x\ ,\ 0)$ y cualquier punto en el eje Y tiene coordenadas $(0\ ,\ y)$,

Entonces para localizar intersecciones con el eje X sustituimos el valor $y = 0$ en la ecuación

$9x-5(0)-7=0$ y despejando x obtenemos $x=\dfrac{7}{9}$

Para localizar intersecciones con el eje Y sustituimos $x = 0$ en la ecuación

$9(0)-5y-7=0$ y despejando a y obtenemos $y=-\dfrac{7}{5}$

Por lo tanto, podremos ubicar en el sistema de coordenadas los puntos

$\left(\dfrac{7}{9},0\right)$ y $\left(0,\dfrac{7}{5}\right)$ donde el lugar geométrico intersecta a los ejes.

11. *Puntos que satisfacen la ecuación*

Como la ecuación obtenida es de primer grado, el dominio correspondiente a la relación entre x y y son todos los números reales.

Pedir a los alumnos lo siguiente:

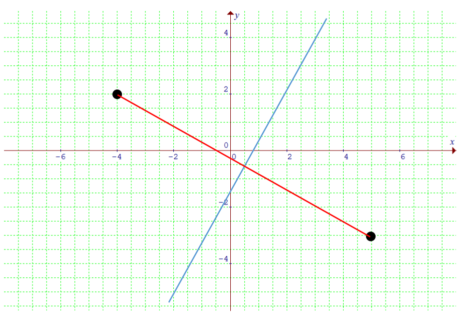
Asignar valores arbitrarios a x, de preferencia cercanos a $\frac{7}{9}$, y sustituirlos en la ecuación para obtener valores de y.

Si x = 1, $9(1)-5y-7=0,\ -5y=-2,\ y=\frac{2}{5}$; el punto encontrado es (1 , 0.4).

Si x = -2, $9(-2)-5y-7=0, -5y=25, y=-5$; el punto es ahora (-2 , -5).

Obtener otros puntos de esta manera y verificar que todos cumplen con la condición geométrica que indica el enunciado.

Trazar el lugar geométrico correspondiente al enunciado e identificar ese lugar geométrico.



¡Claro, el lugar geométrico es la mediatriz del segmento formado por los puntos S y T!

Ejemplo 7

Obtener el lugar geométrico y la ecuación de los puntos *P(x,y)* que se localizan siempre a 3 unidades de distancia del punto (5, -6).

Solución:

El enunciado es muy parecido al del ejemplo 5, solamente que ahora el punto desde el cual se miden las 3 unidades no es el origen. Sin embargo, la condición geométrica es la misma, por tanto la distancia de cualquier punto (*x, y)* al punto (5, -6) es siempre igual a 3.

La distancia se puede escribir como $\sqrt{(x-5)^2+(y+6)^2}=3$

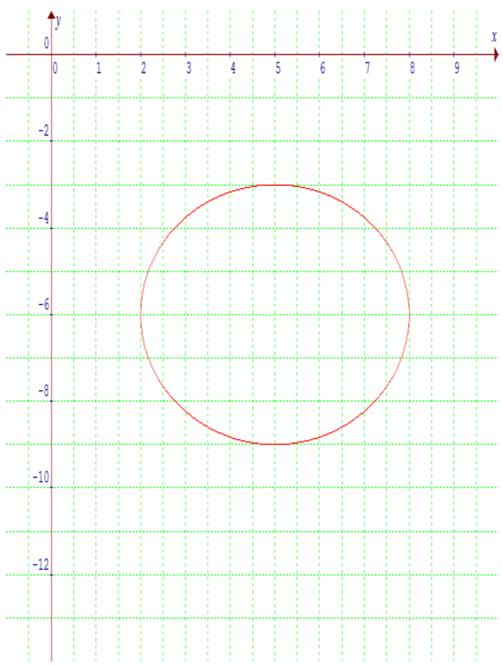
Eliminamos la raíz cuadrada elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad y obtenemos: $(x-5)^2+(y+6)^2=9$

Desarrollamos los binomios al cuadrado y simplificamos términos semejantes para obtener $x^2+y^2-10x+12y-52=0$

Para obtener el lugar geométrico simplemente utilizamos la condición geométrica que menciona el enunciado, los puntos (x,y) se encuentran siempre a 3 unidades del punto (5, -6).

Entonces el lugar geométrico corresponde a una circunferencia de radio 3 unidades con centro en el punto (5 , -6)

Su gráfica se aprecia enseguida



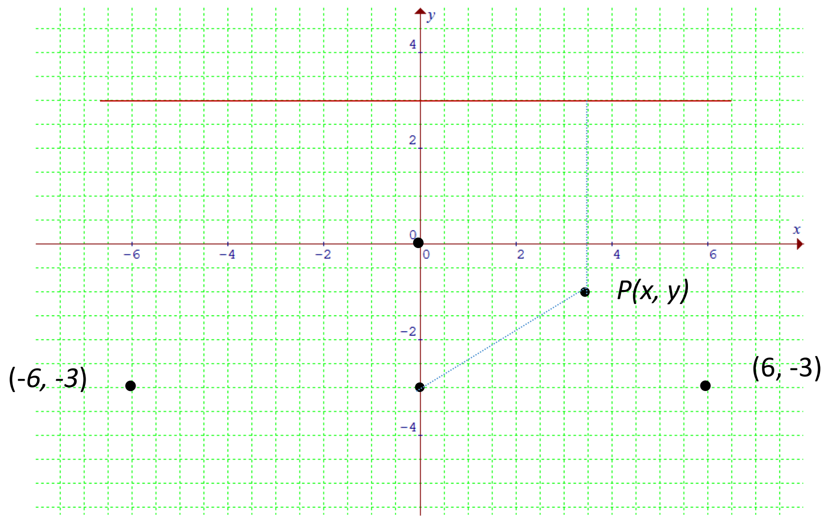
Ejemplo 8

Obtener el lugar geométrico y la ecuación de los puntos $P(x,y)$ cuya distancia al punto A(0,-3) es siempre igual a su distancia a la recta $y = 3$

Solución:

Como ya sabemos, la ecuación $y = 3$ corresponde a una recta paralela al eje X, tres unidades arriba de él.

Podemos situar esta recta y el punto (0,-3) en la gráfica, como se aprecia enseguida:



Uno de los puntos que cumple esta condición es el origen y otros son los puntos (-6,-3) y (6,-3).

La distancia de cualquier punto $P(x,y)$ a (0,-3) es $\sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2}$

La distancia del punto $P(x,y)$ a la recta es la medida del segmento vertical del punto a la recta. Como en este caso la recta es horizontal, para obtener la longitud de este segmento, se restan la ordenada de un punto de la recta, que en este caso vale 3 y la ordenada del punto P

Por lo tanto, la distancia del punto P a la recta $y=3$ será $3-y$.

Igualando estas distancias tenemos

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2}=3-y$$

Elevando al cuadrado para eliminar la raíz y desarrollando los binomios al cuadrado obtenemos $x^2+y^2+6y+9=9-6y+y^2$

Al Simplificar términos semejantes se obtiene $x^2+12y=0$

Que se puede escribir también como $y=\frac{-x^2}{12}$

Para localizar más puntos del lugar geométrico utilicemos el criterio 1.

Si hacemos $x=0$ en la ecuación obtenemos 12 $y=0$, de donde, $y=0$.

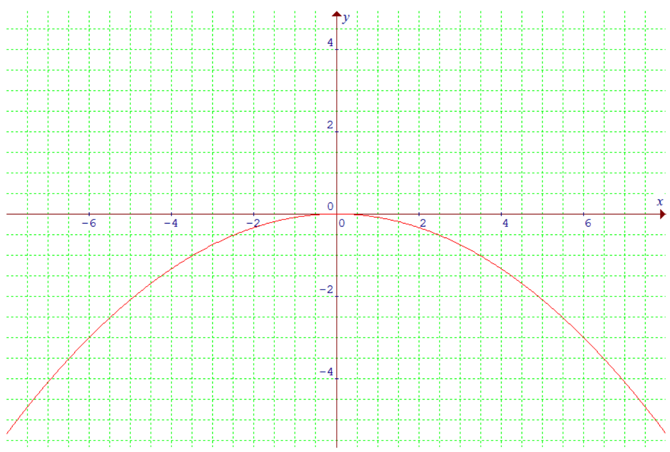
Esto confirma que la gráfica pasa por el origen.

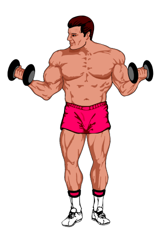
Utilizamos ahora el criterio número 2 buscando puntos cercanos a (0,0)

Completa la tabla para obtener más puntos de la gráfica.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6
y	-3		$-\frac{4}{3}$							$-\frac{4}{3}$		

Al ubicar estos puntos observaremos que la gráfica o lugar geométrico corresponde a una parábola vertical con vértice en el origen.



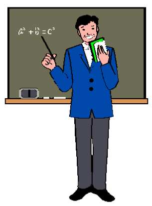


Ejercicio 1

Obtener la ecuación y la gráfica del lugar geométrico de los puntos (x, y) que cumplen lo siguiente:

1. La suma de la abscisa y el quíntuple de la ordenada es igual 11
2. El doble de la ordenada menos el triple de la abscisa es igual a 8
3. La abscisa es siempre el doble de la ordenada.

4. Se mueven siempre a 4 unidades del punto (8,-3)
5. Su distancia al eje X es igual a su distancia al punto (4,-2)
6. La distancia al origen es siempre igual a la distancia a la recta $x = 3$



Sugerencia para quien imparte el curso

Proponemos algunos ejemplos donde se proporciona la ecuación y hay que obtener el lugar geométrico correspondiente. Sugerimos se resuelvan junto alumnos y profesor.

Ejemplo 9

Obtener el lugar geométrico correspondiente a la ecuación $x + y = 6$

Solución:

Buscar primero si la gráfica intersecta los ejes coordenados.

Si $y = 0$ entonces *x=6,* tendremos el punto $(6,0)$

Si *x=0* entonces *y=6,* tendremos el punto $(0,6)$

Para localizar otros puntos de la gráfica asignar valores a x o a y arbitrariamente.

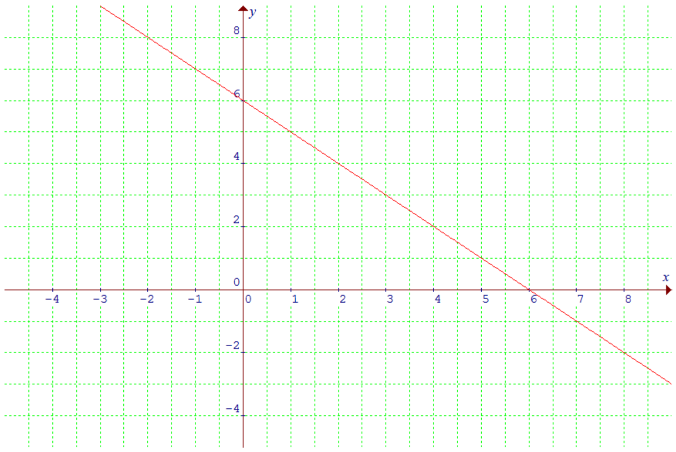
Si $x = -2$, $-2 + y = 6$, y será igual a 8 y el punto será $(-2,8)$

Si $x = 3$, $3 + y = 6$, y será igual a 3, el punto es $(3,3)$

Si $y = 5$, $x + 5 = 6$, x será igual a 1 y el punto es $(1,5)$

Si $y = -3$, $x - 3 = 6$, x será igual a 9 y el punto es $(9,-3)$

Al ubicar los puntos en el plano observa que están alineados, por consiguiente el lugar geométrico corresponde a una línea recta. Podemos unir esos puntos como se aprecia en la figura siguiente.



Ejemplo 10

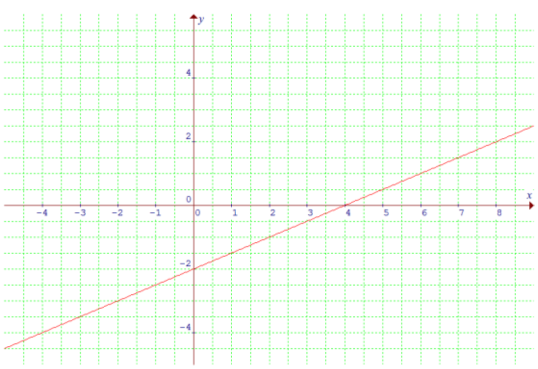
Obtener el lugar geométrico correspondiente a la ecuación $x-2y=4$

Solución:

Preguntar si la gráfica intersecta a los ejes, ¿en qué puntos?

En (4, 0) y (0, -2)

Otros puntos de la gráfica son: $(-2,-3),(2,-1),(-1,-2.5),(1,1.5),\text{etc.}$ Como se puede apreciar en la gráfica siguiente



Entonces el lugar geométrico correspondiente a la ecuación $x-2y=4$ es también una línea recta.

Ejemplo 11

Obtener el lugar geométrico correspondiente a la ecuación $3y - x = 7$

Solución:

Indagar primero si la gráfica intersecta a los ejes.

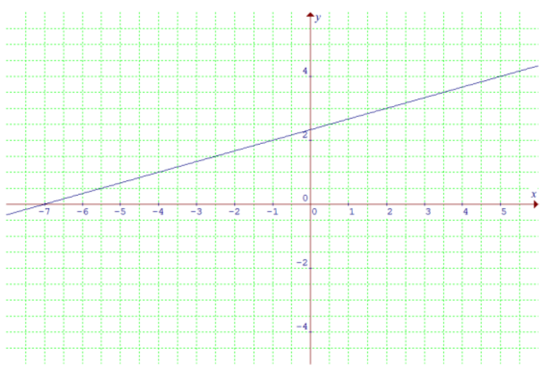
Si $x = 0,\ 3y = 7$, entonces $y = \dfrac{7}{3}$,

Si $y = 0,\ x = 7$

Los puntos de intersección con los ejes son $\left(0, \dfrac{7}{3}\right)$ y $(7,0)$

Otros puntos de la gráfica son $(1,2),\ (-2,3),\ (4,1)\ y \left(2, \dfrac{5}{3}\right)$

La gráfica la puedes apreciar enseguida

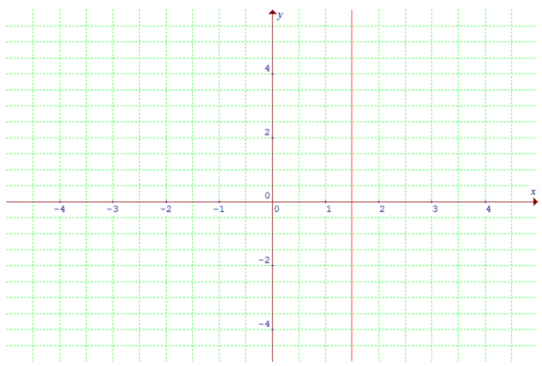


Ejemplo 12

Obtener el lugar geométrico correspondiente a la ecuación $4x = 6$

Solución

Como la ecuación consta solamente de la variable x, al despejarla nos resulta $x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$. La gráfica intersecta el eje X en $\left(\frac{3}{2},0\right)$ pero no intersecta al eje Y. De hecho cualquier otro punto de la gráfica tiene coordenadas $\left(\frac{3}{2},y\right)$, siendo y cualquier número. El lugar geométrico corresponde a una línea recta vertical situada una unidad y media a la derecha del eje Y como se aprecia enseguida.



Ejemplo 13

Identificar el lugar geométrico correspondiente a la ecuación $x^2+y^2=36$

Solución:

Si $x=0$, $y^2=36$ entonces $y=\pm 6$; esto nos proporciona 2 puntos (0, 6) y (0, -6)

Si $y=0$, $x^2=36$, entonces $x=\pm 6$, tenemos otros dos puntos (6, 0) y (-6, 0)

Para obtener otros puntos de la gráfica despejamos y de la ecuación

$y^2=36-x^2,\ y=\pm\sqrt{36-x^2}$

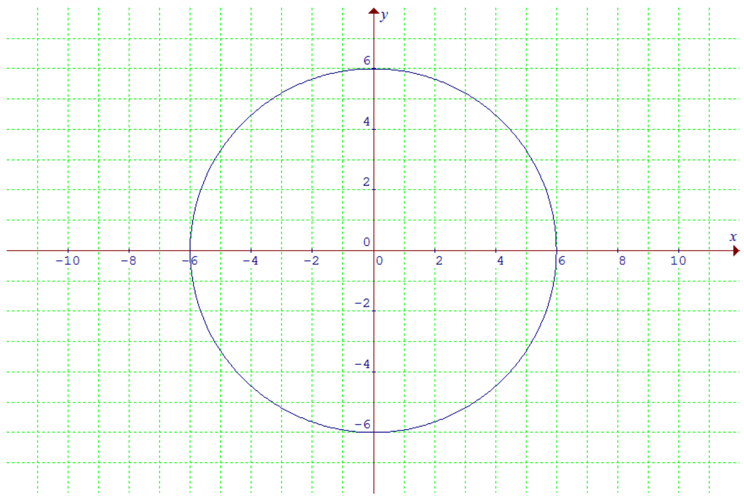
Otros puntos para esta gráfica son: $(-5,\sqrt{11}),\ (-5,-\sqrt{11}),\ (-4,\sqrt{20}),\ (-4,-\sqrt{20})$

Así como también $(5,\sqrt{11}),\ (5,-\sqrt{11}),\ (4,\sqrt{20}),\ (4,-\sqrt{20})$, etc.

Preguntar a los alumnos ¿Qué pueden apreciar de estos puntos?

Efectivamente, los puntos $\left(4,\sqrt{20}\right), \left(-4,\sqrt{20}\right), \left(4,-\sqrt{20}\right) y \left(-4,-\sqrt{20}\right)$ son simétricos respecto a los ejes y al origen.

De hecho el lugar geométrico corresponde a una circunferencia de radio 6 unidades, centrada en el origen, como se muestra a continuación.



Ejemplo 14

Identificar el lugar geométrico correspondiente a la ecuación $x^2 - 8y + 16 = 0$

Solución:

Esta ecuación, a diferencia de la ecuación del ejemplo anterior sólo tiene un término de segundo grado.

Preguntar a los alumnos si tiene puntos donde intersecta a los ejes.

Sugerir a los alumnos sustituir tanto x = 0, como y=0 en la ecuación y resolver si la ecuación restante tiene solución.

El lugar geométrico solamente intersecta el eje Y en el punto (0,2).

Obtener otros puntos de la gráfica eligiendo valores de x cercanos a cero.

Si elegimos *x= -1*, obtenemos $y = \frac{17}{8}$, lo mismo obtendremos si *x=1*

Si *x=-2* obtenemos $y = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2.5$, lo mismo que si *x=2*.

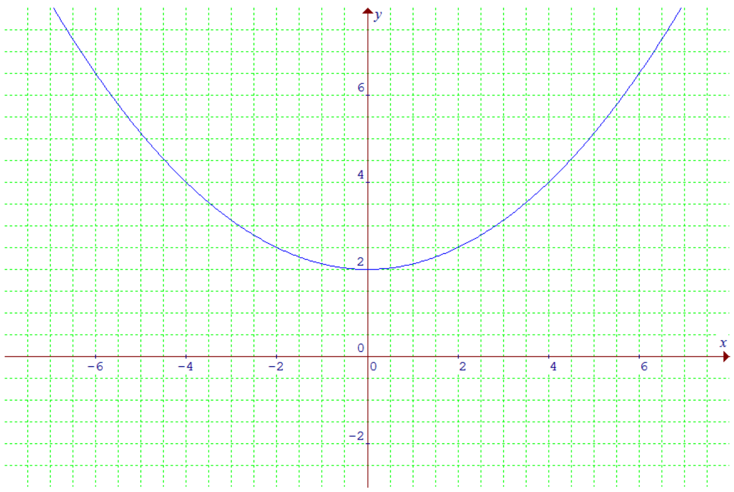
Esto indica que la gráfica es simétrica al eje Y, por lo tanto la ordenada será la misma si consideramos x positivo o negativo

¿Qué nos indican estos resultados?________________________

Esto nos indica que la gráfica es simétrica al eje Y, por lo tanto la ordenada será la misma si consideramos x positiva o negativa.

Por consiguiente otros puntos de la gráfica son $\left(\pm 3, \frac{25}{8}\right), (\pm 4, 4)$

El lugar geométrico corresponde a una parábola vertical que abre hacia arriba y tiene su vértice en el punto (0. 2) como se muestra enseguida.



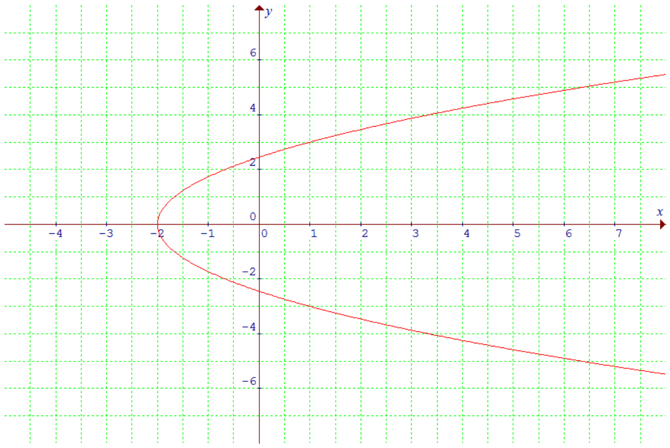
Ejemplo 15

Identificar el lugar geométrico correspondiente a la ecuación $y^2 - 3x = 6$

Solución:

Sugerir a los alumnos si el lugar geométrico tiene intersecciones con los ejes de coordenadas, especificar las coordenadas de esos puntos y obtener otros puntos de la gráfica sustituyendo valores de x habiendo despejado y de la ecuación

El lugar geométrico corresponde a una parábola horizontal con vértice en $(-2, 0)$ como se muestra enseguida.



Ejemplo 16

Identificar el lugar geométrico correspondiente a la ecuación $y - x^2 + 4x + 5 = 0$

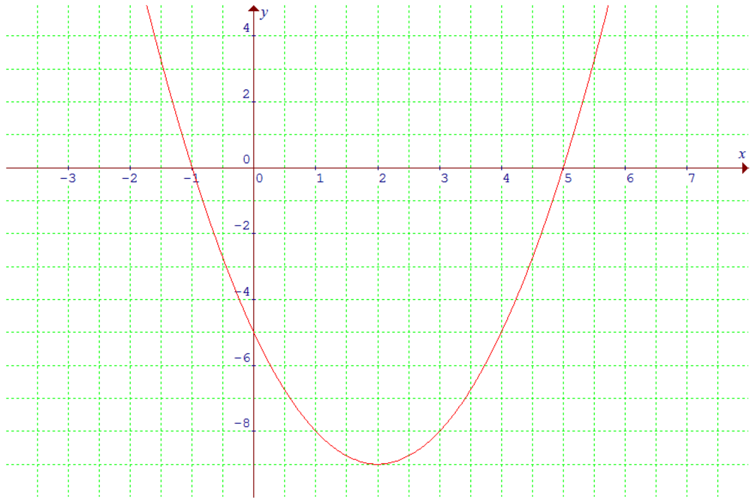
Solución:

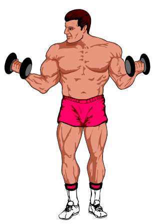
Para intersecciones con los ejes:

Si $x = 0$ resulta $y = -5$, tendremos entonces el punto $(0, -5)$

Si $y = 0$ resulta $-x^2 + 4x + 5 = 0$ la cual tiene soluciones $x = 5$ y $x = -1$, tendremos entonces los puntos $(-1, 0)$ y $(5, 0)$

Para obtener otros puntos de la gráfica podemos despejar y de la ecuación y sustituir valores de x. Obtenemos así los puntos $(1, -8), (2, -9), (3, -8)$ y $(4, -5)$. El lugar geométrico corresponde a una parábola vertical como se muestra enseguida.





Ejercicio 2

Identifica el lugar geométrico y traza la gráfica de:

1. $4x-3y=0$
2. $5x-2y+4=0$
3. $y=\frac{1}{2}x+3$
4. $y=-x^2+6x$
5. $x^2+y^2-9=0$
6. $y^2-8x+24=0$