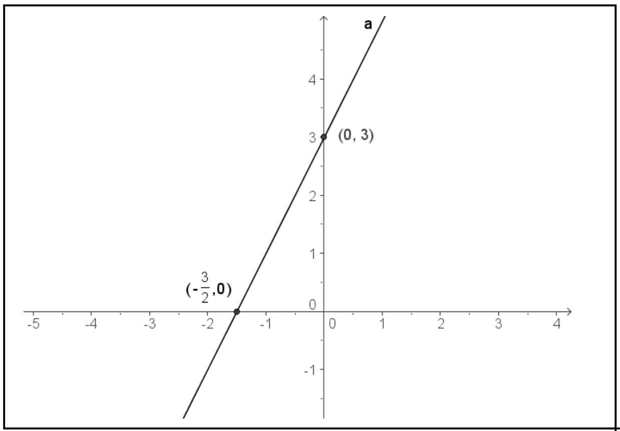
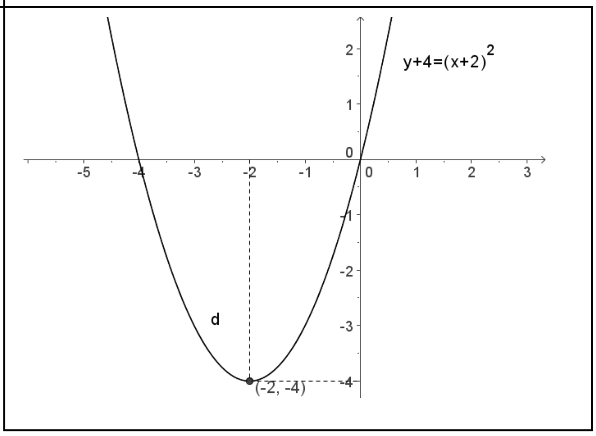
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL SUR

GUÍA DE ESTUDIO
MATEMÁTICAS III
(Álgebra y Geometría)



$$y = 2x + 3$$



$$Y + 4 = (x + 4)^2$$

Elaborada por:
Gpe. Xochitl Chávez Pérez
Daniel Flores Ibarra
Guadalupe Rosas Mercado
Rocío Solís Ledesma

Octubre de 2005

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es una guía de estudio de Matemáticas III, la cual esta dirigida a los estudiantes del Colegio que por diversos motivos no han aprobado la asignatura. Y tiene el propósito de auxiliarlos en la preparación de su examen extraordinario.

En el desarrollo de este trabajo se contemplan cinco unidades basadas en el programa de estudio vigente.

1) SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.
2) SISTEMAS DE COORDENADAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS.
3) LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA.
4) ELIPSE, CIRCUNFERENCIA Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS.
5) LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA.

RECOMENDACIONES PARA EL BUEN USO DE ESTA GUIA.

- Para resolver algunos problemas es necesario que te apoyes con una calculadora científica.
- Comprueba que tus resultados estén correctos cotejándolos con los que se te presentan en algunos problemas.
- Si no llegaste a la solución correcta de algún problema, trata de encontrar tus errores e intenta resolverlo otra vez.
- Estudia los temas de cada unidad apoyándote en la bibliografía propuesta al final.
- Procura resolver todas las preguntas y en todo caso te asesores con algún profesor.

Y recuerda que:

"La perseverancia torna los anhelos en realidades.

Los escollos sólo sirven para forjar el espíritu".

(I.Ch.P.)

UNIDAD 1. SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Propósitos:

Ampliar el concepto de sistemas de ecuaciones y extender dos procedimientos algebraicos de solución.

Reafirmar el significado algebraico y geométrico de la solución de un sistema.

Proporcionar una herramienta para el manejo del método analítico.

Ecuaciones equivalentes

Se llaman **ecuaciones equivalentes**, a las ecuaciones que ***tienen las mismas soluciones*** y se obtienen multiplicando todos y cada uno de los términos de un ecuación por un número distinto de cero. Por ejemplo, si cada uno de los términos de la ecuación (Ec1) se multiplica por 5 se obtiene:

$$10x + 4y = 8 \quad \ldots \text{(Ec1)}$$

$$5(10x) + 5(4y) = 5(8)$$

$$50x + 20y = 40 \ldots 5\text{(Ec1)}$$

Ejercicios 1

1. *Obtén ecuaciones equivalentes a la ecuación anterior Ec1, multiplicando por 2, 4, –3, 1/2 y 1/4.*

2. Comprueba que las ecuaciones que obtuviste son equivalentes sustituyendo $x = 2$, $y = -3$, pues es una solución de la (Ec1).

Combinación lineal de dos ecuaciones

Dado un sistema de ecuaciones se puede obtener una ecuación sumando o restando dos ecuaciones del sistema u otra combinación de ecuaciones equivalentes. Por ejemplo con el siguiente sistema:

$$10x + 4y = 8 \ldots\text{(Ec1)}$$

$$5x + 3y = 4 \ldots\text{(Ec2)}$$

La combinación lineal 2(Ec1) + (Ec2) (El doble de la ecuación 1 más la ecuación 2)**.**

$$\begin{array}{rcll} 20x + 8y & = & 16 & \ldots(2(\textbf{Ec1})) \\ 5x + 3y & = & 4 & \ldots(\textbf{Ec2}) \\ \hline 25x + 11y & = & 20 & \ldots(2(\textbf{Ec1}) + (\textbf{Ec2})) \end{array}$$

La **combinación lineal de (Ec1) y (Ec2), es una ecuación** que tiene la misma solución que las dos ecuaciones.

Con otro ejemplo te quedará más claro:

La combinación es **2(Ec1) + (3)(Ec2),** (multiplica por 2 cada uno de los términos de la ecuación 1 y súmalo término a término con el triple de cada uno de los términos de la ecuación 2.

$$\begin{array}{rcl} 20x + 8y & = & 16 \text{ ....}(2(\textbf{Ec1})) \\ 15x + 9y & = & 12\text{....}(3(\textbf{Ec2})) \\ \hline 35x + 17y & = & 28\text{....}(2(\textbf{Ec1}) + 3(\textbf{Ec2})) \end{array}$$

Un tercer ejemplo es la combinación lineal:

$\left(\frac{1}{4}\right)$(**Ec1**) + (–2)(**Ec2**)

multiplicamos la ecuación 1 por $\left(\frac{1}{4}\right)$ y multiplicamos por –2 la ecuación 2 y lo sumamos término a término, como se escribe a continuación.

$$\begin{array}{rcl} 2.5x + y & = & 2\text{....}\left(\left(\frac{1}{4}\right)(\textbf{ Ec1})\right) \\ -10x - 6y & = & -8\text{...}(-2(\textbf{Ec2})) \\ \hline -7.5x - 5y & = & -6\text{....}\left(\left(\frac{1}{4}\right)(\textbf{ Ec1}) - 2(\textbf{Ec2})\right) \end{array}$$

Ejercicios 2

Dado el sistema de ecuaciones, obtener las combinaciones lineales de los incisos:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 4y & = & -6 \text{ ....}(\textbf{Ec1}) \\ 2x - y & = & 7\text{......}(\textbf{Ec2}) \end{array}$$

1) (EC1) + 3(EC2)
2) (EC1) – (EC2)
3) (–2)(EC1) + 3(EC2)
4) (1/2)(EC1) + 2(EC2)
5) (EC1) + 4(EC2)

Como obtener sistemas de ecuaciones equivalentes

Los sistemas de ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones, para obtenerlos se pueden hacer cualquiera de estas “operaciones”:

1. Se intercambian las ecuaciones.

2. Se cambia una ecuación por la ecuación multiplicada por un número distinto de cero.*

3. Se cambia una ecuación por una de sus combinaciones lineales.

*En el siguiente ejemplo se aplica el método de eliminación de sistemas de ecuaciones equivalentes, para resolverlo. Para cada sistema se señala como fue el cambio de la ecuación con **<u>respecto</u> al sistema inmediato anterior**.*

Sistemas equivalentes	*Cambios*
$\begin{cases} 2x + y = 200 \text{ (Ec1)} \\ x + 3y = 300 \text{ (Ec2)} \end{cases}$	
$\begin{cases} x + 3y = 300 \\ 2x + y = 200 \end{cases}$	Intercambiamos renglones
$\begin{cases} -2x - 6y = -600 \\ 2x + y = 200 \end{cases}$	La (Ec1) la cambiamos por (– 2) (Ec1)
$\begin{cases} x + 3y = 300 \\ -5y = -400 \end{cases}$	(Ec2) la cambiamos por la combinación (Ec1) + (Ec2)
$\begin{cases} x + 3y = 300 \\ y = 80 \end{cases}$	Cambiamos (Ec2) por (– 1/5) (Ec2)

El último ***sistema es triangular*** da explícito el valor de $y = 80$, usando lo que se conoce como la sustitución regresiva tenemos:

$$x + 3(80) = 300$$

* Multiplicar una ecuación por un número, implica multiplicar cada uno de los términos por ese número.

$$x = 300 - 240$$

$$x = 60$$

La comprobación la haremos en las dos ecuaciones iniciales, aunque es la solución de todos los sistemas equivalentes que se obtuvieron.

Sustituimos $x = 60$ y a $y = 80$ en:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x + y = 200 \text{ ..(Ec1)} & \longrightarrow & 2(60) + 80 = 200 \\ x + 3y = 300 \text{ ..(Ec2)} & \longrightarrow & 60 + 3(80) = 300 \end{array}\right.$$

En el segundo ejemplo tú ayudaras a completarlo

Te dejamos algunos espacios para que los llenes con base en la operación que proponemos, en el sistema equivalente posterior puedes revisar tus respuestas:

Sistemas equivalentes	*Cambios*

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \text{ (Ec1)} \\ 3x + 4y = -8 \text{ (Ec2)} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \_\_\_x - 6y = \_\_\_ \\ 3x + 4y = -8 \end{array}\right. \longleftarrow (-3)\text{ (Ec1)}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + 2y = -3 & \longleftarrow & (-1/3)\text{(Ec1)} \\ -2y = \_\_\_ & \longleftarrow & \text{(Ec1)} + \text{(Ec2)} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + \_\_\_y = \_\_\_ & & \\ y = \_\_\_ & \longleftarrow & (-1/\_\_\_\ )\text{ (Ec2)} \end{array}\right.$$

El sistema equivalente resultante es:

$$\begin{cases} \mathbf{x + 2y = -3} \\ \mathbf{y = -1/2} \end{cases}$$

Aplica la sustitución regresiva y obtén el valor de *x.*

$x + 2\,(\_\_\_\_\_)\ = \_\_\_\_\_$

$x = -2$

Comprueba en el sistema original que la solución del sistema es $\boldsymbol{x = -2,\ y = -1/2}$.

Ejercicios 3

Resuelve los siguientes sistemas con el método de eliminación y sistemas de ecuaciones equivalentes

1) $\begin{cases} 2x + 3y = -8 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 8y = -4 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -3x + 4y = -20 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x - 2y = 4 \\ 3x = 3 + y \end{cases}$

Sugerencia: escríbela primero en orden.

Interpretación Geométrica

Sabemos que cada una de las ecuaciones lineales con dos variables ***representa una recta****. Un sistema de estas ecuaciones, puede representar dos rectas que se cortan o una única recta o dos rectas paralelas.*

$$\begin{cases} -x + 2y = 2 \text{ ...(ec1)} \\ 2x - y = 5 \text{...(ec2)} \end{cases}$$

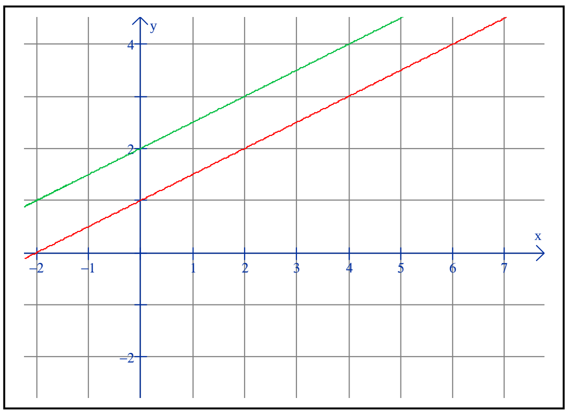
- En cada caso completa los elementos que falten y grafica la ec2.
-

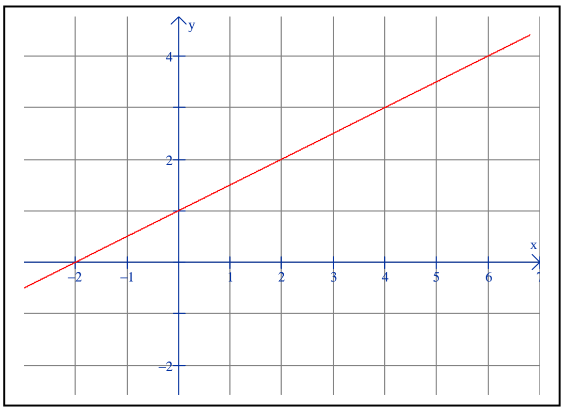
x	0	1	2	3
(ec1) y	1		2	
(ec2) y		–3	–1	

Este sistema se le llama ***consistente*** y tiene ***una única solución***.

Existen otras dos posibilidades, te pedimos que identifiques cada gráfica con su sistema y con las características del sistema (procede como antes). Relaciona con flechas el sistema, la gráfica y sus características.

$$\begin{cases} -x + 2y = 2 \text{ ...(ec1)} \\ 3x - 6y = -6 \text{...(ec2)} \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 2y = 2 \text{ ...(ec1)} \\ 2x - 4y = 4 \text{ ...(ec1)} \end{cases}$$





Sistema consistente con infinitas soluciones

Sistema inconsistente sin solución

Compara tus resultados con lo que sigue:

Conclusiones:

- Cada una de las ecuaciones lineales en el sistema representa una recta.
- La solución es el punto de intersección de las rectas, cuando el sistema es consistente.
- La representación gráfica de ecuaciones equivalentes corresponde a la misma recta, el sistema es consistente y tiene infinitas soluciones.
- El sistema es inconsistente si no tiene solución y las rectas son paralelas.

Problema 3

María, Pedro y Luis fueron al establecimiento de “Copias y Copias”. María pidió 10 copias, 4 amplificaciones y 3 acetatos; Pedro pidió 5 copias, 2 amplificaciones y 1 acetatos y Luis 1 copia y 3 acetatos. Si pagaron \$19, \$8 y \$9.60 respectivamente. ¿Cuánto cuesta cada copia, cada amplificación y cada acetato?

x es el precio de cada copia (\$)
y es el precio de cada amplificación (\$)
z es el precio de cada acetatos (\$)

¿Qué ecuaciones representan la compra de María, Pedro y Luis?

$$\begin{cases} 10x + 4y + 3z = 19 & \text{(compra de María)(ec1)} \\ 5x + 2y + z = 8 & \text{(compra de Pedro)(ec2)} \\ x + 3z = 9.60 & \text{(compra de Luis)(ec3)} \end{cases}$$

Resolveremos ahora un sistema de 3x3, es decir 3 ecuaciones y 3 incógnitas, usando el método de eliminación.

El objetivo es obtener un sistema equivalente triangular de la forma:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ \quad\quad + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ \quad\quad\quad\quad + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

> **NOTA:** *Aunque pueden ser a_1, b_2 y c_3 diferentes de 1 los buscaremos que sean uno, pues existe el método de matrices en el que se emplean los unos.*

Plantearemos las operaciones con las ecuaciones y tú completaras el sistema equivalente.

Intercambiamos la (ec1) por la (ec3).

$$\begin{cases} x \quad\quad + 3z = 9.60 \\ 5x + 2y + z = 8 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Cambiamos la (ec2) por la combinación (– 5) (ec1) + (ec2) y

(ec3) por (– 10) (ec1) + (ec3).

$$\begin{cases} x \quad\quad + 3z = 9.60 \\ \quad 2y - 14z = -40 \quad \leftarrow (-5)\,(ec1) + (ec2) \\ \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ \quad \leftarrow (-10)\,(ec1) + (ec3) \end{cases}$$

Para que el coeficiente de ***y*** en la (ec2) se 1, se multiplica por ½ que es el inverso multiplicativo de 2, coeficiente de ***y***.

$$\begin{cases} x \quad\quad + 4z = 9.60 \\ \quad y - \_\_\_\, z = \_\_\_\_\_ \quad \leftarrow (1/2)\,(ec2) \\ \quad 4y - 27z = -77 \end{cases}$$

El coeficiente de y es 4, el simétrico (– 4) lo usamos para multiplicar la (ec2), para la combinación lineal siguiente (– 4) (ec2) + (ec3)

$$\begin{cases} x \quad\quad + 3z = 9.60 \\ \quad y - 7z = -20 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ \quad \leftarrow (-4)\,(ec2) + (ec3) \end{cases}$$

Finalmente como el coeficiente de z es 1 en la tercera ecuación, hemos conseguimos un sistema triangular equivalente.

Revisa si coincidimos:

$$\begin{cases} x + 0y + 3z = 9.60 \\ \quad y - 7z = -20 \\ \quad\quad z = 3 \end{cases}$$

Sustituye "z" en la ecuación 2, luego sustituye a "y" y "z" en la ecuación 1 (sustitución regresiva). Se obtiene:

$$\boxed{x = 0.60, \quad y = 1 \quad \text{y} \quad z = 3}$$

Comprobamos en la ecuación 1 original:

$$10\,(0.60) + 4(1) + 3(3) = 19$$
$$6 + 4 + 9 = 19$$

Comprueba que también nos da una identidad en la ecuación 2 y en la 3.

Ya resolvimos el sistema de ecuaciones y la respuesta al problema es que las copias costaron $0. 60, las amplificaciones $1.00 y los acetatos $3.00.

Ejercicios 4

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de eliminación y obtén el sistema triangular equivalente.

1) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -4 \\ 3x - 3y + 6z = -3 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 3 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ 3y - 2z = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y - 2z = 7 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 6z = -21 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 6 \\ -3y + 2z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = -6 \end{cases}$

5) Resolver algunos problemas del capitulo 9 Sistemas de ecuaciones lineales del ***Barnett.***

Sistemas de ecuaciones No lineales

Método de sustitución
El principal método para resolver los sistemas de una **ecuación lineal con otra no lineal**, es el método de sustitución. En un ejemplo podrás entenderlo mejor.

$$-3x + y = 7 \ldots (ec1)$$
$$y = (x + 2)^2 + 3 .. (.ec2)$$

Paso 1. Espejar de la ecuación lineal una de las dos variables:

$$y = 3x + 7$$

Paso 2. Sustituir en la ecuación no lineal la variable despejada:

$$\mathbf{3x + 7} = (x + 2)^2 + 3$$

Paso 3. Se desarrolla el cuadrado, se despeja y se simplifica:

$$3x + 7 = x^2 + 4x + 4 + 3$$
$$x^2 + x = 0$$

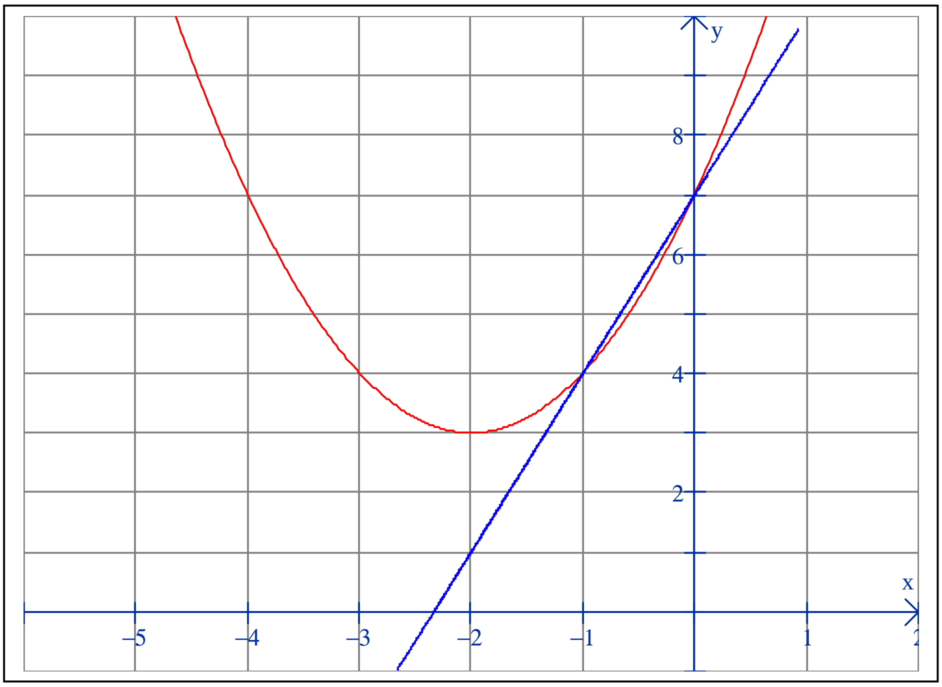
Paso 4. Se resuelve la ecuación de segundo grado *(por factorización, fórmula general, etc.)*

$$x(x + 1) = 0 \text{ entonces } x = 0 \text{ ó } x = -1$$

Paso 5. Se sustituyen los valores encontrados en alguna de las ecuaciones y se obtienen las soluciones.

$$y = (0 + 2)^2 + 3 \ldots (ec2) \text{ entonces } y = 7$$
$$y = (-1 + 2)^2 + 3 \ldots (ec2) \text{ entonces } y = 4$$

La solución al sistema de ecuaciones son los puntos (0, 7) y (–1, 4). Lo cual se puede corroborar si se grafican ambas ecuaciones en un mismo plano cartesiano.



Ejercicios 5

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y haz la gráfica:

1) $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+3)^2 = 100 & \textit{(circunferencia con centro (–1, –3) y radio 10)} \\ y = -\dfrac{4x}{3} - 21. & \text{(recta decreciente)} \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 & \textit{(parábola con vértice en el origen)} \\ -\ x + y = 2 & \textit{(recta creciente)} \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 + 4x & \textit{(parábola con vértice en el origen)} \\ -3x + y = 2 & \text{(recta creciente)} \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25 & \textit{(circunferencia con centro (–1, 2) y radio 5)} \\ x - 2y = 0 & \text{(recta creciente)} \end{cases}$

Sistemas de ecuaciones No lineales ambas

Puede emplearse el método de eliminación o el de sustitución según el sistema de ecuaciones. En este caso emplearemos el método de eliminación.

$$\begin{cases} x^2 + (y+3)^2 = 25 \\ y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Paso 1. Desarrollamos los cuadrados y ordenamos los términos igualando a los términos independientes:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6y + 9 &= 25 \\ -x^2 + 2y &= -7 \end{aligned} \qquad\qquad \left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6y &= 16 \\ -x^2 \qquad + 2y &= -7 \end{aligned}\right\}$$

Paso 2. Con la suma o resta eliminamos alguna de las incógnitas:

$$y^2 + 8y = 9$$

Paso 3. Resolver la ecuación

$y^2 + 7y - 9 = 0$ *por la fórmula general*

$$y_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)}$$

y = 1 ; y = – 9

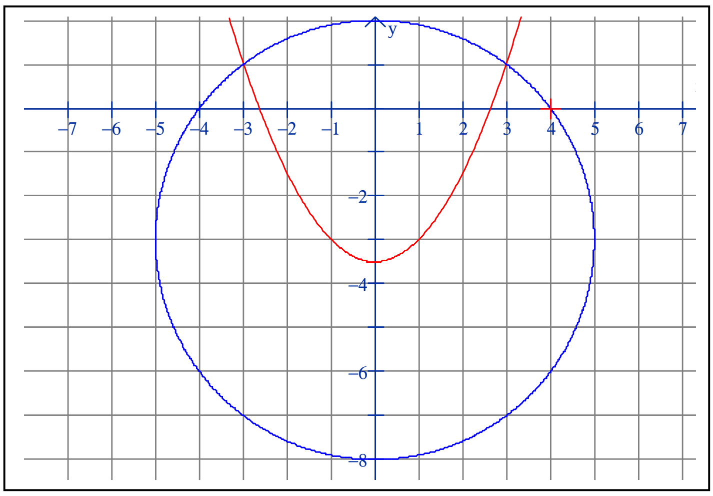
Paso 4. Sustituir en alguna de las dos ecuaciones y despejar:

$x^2 + (\mathbf{1} + 3)^2 = 25$ *entonces* $x = \pm 3$

$x^2 + (\mathbf{-9} + 3)^2 = 25$ *en este caso no existen valores para x.*

Las soluciones son ***(3, 1) y (–3, 1)***

Las gráficas son:



Ejercicios 6

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 = -4(y - 2) \end{cases}$

3. $\begin{cases} 16x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x + 4)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

Solución a los ejercicios.

Ejercicios 1

$20x + 8y = 16$ ....2(Ec1)
$40x + 16y = 32$ ....4(Ec1)
$-30x - 12y = -24$ ....–3(Ec1)
$5x + 2y = 4$ ....(1/2)(Ec1)
$\frac{5}{2}x + y = 2$ ....(Ec1)

Ejercicios 2

1) $9x + y = 15$ ...(EC1) + 3(EC2)
2) $x + 5y = -13$ ... (EC1) – (EC2)
3) $-11y = 33$... (–2)(EC1) + 3(EC2)
4) $\frac{11}{2}x = 11$ ... (1/2)(EC1) + 2(EC2)
5) $11x = 22$ ... (EC1) + 4(EC2)

Ejercicios 3

1) $x = 2, \quad y = -4$
2) $x = -2, \quad y = 5$
3) $x = 3, \quad y = -2$
4) $x = 4, \quad y = -2$
5) $x = 1, \quad y = 0$.

Ejercicios 4

1) $x = -1, \quad y = 2, \quad z = 1$
2) $x = 1, \quad y = 2, \quad z = -2$
3) $x = 0, \quad y = 3, \quad z = -2$
4) $x = -7/3, \quad y = 5/3, \quad z = 4$

Ejercicios 5

1) *(–9, –9)*
2) *(–1, 1) y (2, 4)*
3) *(–2, –4) y (1, 5)*
4) *(4, 2) y (–4, –2)*

Ejercicios 6

1) $(\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, 1)$ y $(-\sqrt{3}, 1)$
2) *(2, 1) y (–2, 1)*
3) *(–1, –3), (–1, 3), (1, –3) y (1, 3)*
4) (0, 3) y (0, –3)

UNIDAD 2. SISTEMAS DE COORDENADAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS

Propósitos.

- Percibirás a los sistemas de coordenadas como la noción fundamental para poder realizar el estudio analítico de los lugares geométricos.
- Identificarás el enunciado de un problema, la estrategia que te permita obtener los parámetros esenciales de un lugar geométrico o bien, vislumbrar un procedimiento alterno para obtener la ecuación que los representa.

2.1 Estudio analítico de un punto en el plano

❖ En el Sistema de coordenadas rectangulares (Plano Cartesiano).

1. Considera los puntos A(8,6) y B(6,8), sin hacer dibujo alguno contesta:
¿Cuál de los dos está más arriba del eje X?_______________________
¿Cuál está más a la derecha del eje Y?___________________________

2. Escribe las coordenadas de un punto colocado entre C (7,6) y D (10,6). Escribe las coordenadas de otro punto colocado exactamente a 5 unidades por encima de D.

3. Sea un punto E (x, 10), donde “x” puede tomar cualquier valor. Elige un valor para “x” que cumpla con la condición de que el punto resultante esté más cerca del eje Y que el punto F (5,10). Escoge otro valor para “x” de manera que el nuevo punto este más lejos del eje Y que el punto G (7,10).

4. ¿Cuál es el punto que se encuentra colocado simétricamente respecto al eje X en referencia al punto F (5,10)?

5. Sea D (9,5), encuentra el punto H colocado a la mitad entre D y el eje X. Localiza un punto I por arriba de D colocado a una altura triple de la de D respecto al eje X.

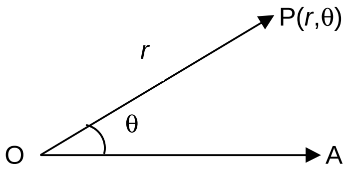
❖ En el Sistema de coordenadas polares

En lugar de fijar la posición de un punto del plano en función de sus distancias a dos rectas perpendiculares es preferible, a veces, hacerlo en función de su distancia a un punto fijo y de la dirección con respecto a una recta fija que pase por este punto. Las coordenadas de un punto, en esta referencia, se llaman *coordenadas polares*. Por ejemplo, ¿Te has preguntado alguna vez qué es un radar, cómo funciona y para qué sirve?

El radar es un dispositivo para detectar la presencia de objetos y determinar la dirección y distancia a que se encuentran. El radar se emplea como ayuda a la navegación en barcos y aviones, en meteorología y con fines militares para la localización de blancos. Los datos emitidos por la pantalla de un radar están escritos en coordenadas polares (r, θ), donde r es la distancia a la que se encuentra el objeto y θ nos indica en que dirección se encuentra.

El punto fijo O se denomina *polo* y la recta fija OA se llama *eje polar*.

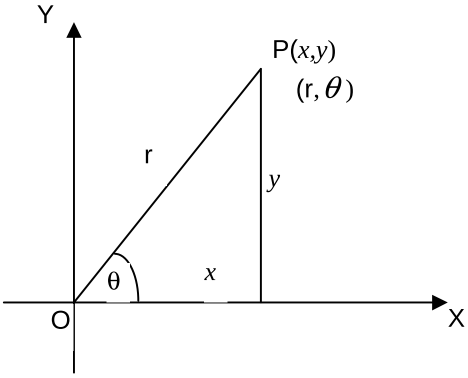
Las coordenadas polares de un punto P se representan por (*r*,θ), siendo *r* la distancia OP y θ el ángulo AOP.



La distancia *r* medida desde O hasta P es positiva. Igual que en trigonometría, el ángulo θ es positivo cuando se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj; *r* es positivo cuando se mide desde el polo al punto, y negativo en caso contrario.

Consideremos al punto P(*r,*θ) y supongamos que el eje polar OX y el polo O son, respectivamente, el eje X y el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Sean (*x,y*) las coordenadas rectangulares del mismo punto P. En estas condiciones,

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\,sen\,\theta,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\theta = arc\ tg\,\frac{y}{x}$$



EJERCICIO RESUELTOS

Transforma a coordenadas polares o rectangulares según corresponda los siguientes puntos.

1. P(3,30º).

Solución:

Las coordenadas rectangulares de este punto se obtienen sustituyendo los valores de *r* = 3, θ = 30º en las expresiones: $x = r\cos\theta, \quad y = r\, sen\,\theta$, esto es,

$$x = 3\cos 30^{\circ} = 3(0.866) = 2.6$$
$$y = 3\, sen\, 30^{\circ} = 3(0.5) = 1.5$$

Entonces las coordenadas rectangulares corresponden al punto (2.6,1.5).

2. Q(5,2)

Solución:

Ahora usaremos las expresiones: $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = arc\ tg\,\dfrac{y}{x}$, para convertir las coordenadas rectangulares en polares.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} = 5.38$$
$$\theta = ang\ \ tg\,\frac{y}{x} = ang\, tg\,\frac{2}{5} = ang\, tg\ 0.4 = 21.80^{\circ} = 21^{\circ}48'$$

Por lo anterior, las coordenadas polares son (5.38, 21º48')

EJERCICIO PROPUESTOS

Usando las relaciones convenientes transforma las siguientes coordenadas a polares o rectangulares según corresponda.

3. (1,1) 4. (– 2,3) 5. (– 2,210º) 6. (6,45º)

7. (3,– 4) 8. (4,150º) 9. (8, 30º) 10. (0,1)

Respuestas:

3. ($\sqrt{2}$, 45º) 4. ($\sqrt{13}$,123º41') 5. (1.73, 1) 6. (4.24, 4.24)

7. (5, 126º52') 8. (– 3.46, 2) 9. (6.93, 4) 10. (1,90º)

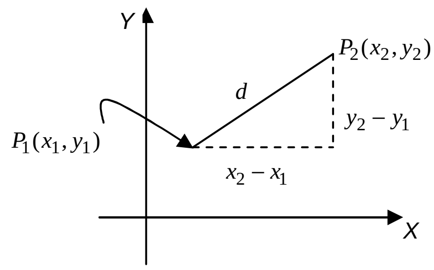
2.2 Estudio analítico de un segmento rectilíneo en el Plano Cartesiano

- Distancia entre dos puntos

La distancia d entre dos puntos

$P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



Por ejemplo, la distancia entre los puntos (3, –1) y (6, 3) es:

$$d = \sqrt{(6-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\ unidades$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En los siguientes incisos encuentra la distancia entre cada par de puntos. Para cada segmento traza su gráfica en un plano cartesiano.

a) (3, 4) y (6, 0) b) (3, 5) y (3, –4) c) (1, 1) y (9, 7)

d) (8, 7) y (3, – 5) e) (– 4, 3) y (2, – 5)

2. Comprueba que el triángulo cuyos vértices son A(2, – 1), B(– 1, 3) y C(– 1, – 1) tiene un perímetro igual a 12 u.

3. Demuestra que es isósceles el triángulo que tiene por vértices A(– 2, 3), B(– 4,– 1) y C(3, – 2).

4. Traza el cuadrilátero cuyos vértices son: (1, 2), (4, 5), (1, 5) y (4, 2). Calcula las longitudes de sus diagonales y comprueba que ellas son iguales.

5. Traza el triángulo de vértices A(4, 2), B(0, 6) y C(– 2, – 2); dibújale las medianas y calcula sus longitudes. Recuerda que las fórmulas para calcular las coordenadas del punto medio de un segmento son:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Respuestas:

1. a) 5 b) 9 c) 10 d) 13 e) 10

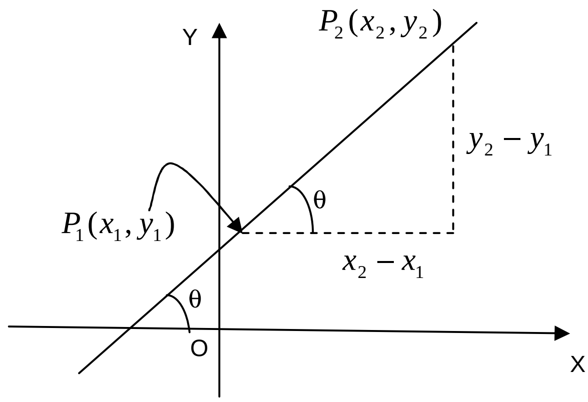
2. $d_{\overline{AB}} = 5$, $d_{\overline{BC}} = 4$, $d_{\overline{AC}} = 3$, por lo tanto el perímetro es de 12 unidades.

5. D(2, 4) punto medio de AB; E(– 1, 2) punto medio de BC; F(1, 0) punto medio de CA

$$d_{\overline{AE}} = 5; \quad d_{\overline{BF}} = \sqrt{37}; \quad d_{\overline{CD}} = \sqrt{52}$$

- Ángulo de inclinación del segmento y concepto de pendiente

Se llama ***ángulo de inclinación*** (θ), o simplemente ***inclinación*** de una recta al ángulo positivo más pequeño que forma la dirección positiva de esta recta con la parte positiva del eje X. Por consiguiente, la inclinación de una recta es un ángulo que está entre 0º y 180º. La tangente trigonométrica de la inclinación es ***la pendiente*** de la recta,



$$m = tg\,\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

cualesquiera que sean los cuadrantes en los que estén situados los puntos P_1 y P_2.

Si dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales.

Si dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es igual al recíproco de la pendiente de la otra con signo contrario. Esto es, llamando m_1 a la pendiente de L_1 y m_2 a la de L_2 se tiene $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, o bien, $m_1 m_2 = -1$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos (5, 6) y (– 4, 2).

Solución: $m = \frac{2-6}{-4-5} = \frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}$

2. Obtén la inclinación de la recta que pasa por los puntos (– 1, 5) y (7, – 3).

Solución: $m = \frac{-3-5}{7+1} = \frac{-8}{8} = -1$ luego θ = ang tg (– 1), por tanto θ=135º

3. Prueba que la recta que pasa por los puntos (– 1, – 5) y (6, – 2) es paralela a la recta que pasa por (– 2, – 4) y (5, – 1).

Solución: $m_1 = \frac{-2+5}{6+1} = \frac{3}{7}$ $m_2 = \frac{-1+4}{5+2} = \frac{3}{7}$

como $m_1 = m_2$, luego las rectas son paralelas.

4. Demuestra que el triángulo cuyos vértices son A(5, – 3), B(4, 4) y C(1, 0) es rectángulo.

Solución: Denotando por m_1, m_2 y m_3 las pendientes respectivas de AB, BC y AC, se tiene: $m_1 = \frac{4+3}{4-5} = -7$; $m_2 = \frac{0-4}{1-4} = \frac{4}{3}$; $m_3 = \frac{0+3}{1-5} = -\frac{3}{4}$

Como $\left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = -1$. Entonces BC y AC son perpendiculares y por consiguiente el triángulo es rectángulo en C.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcula el ángulo de inclinación θ, de los segmentos determinados por cada uno de los pares de puntos que se dan:

a) P_1(– 1, – 3) y P_2(5, 3) b) P_1(2, – 1) y P_2(– 2, 3) c) P_1(5, – 1) y P_2(5, 3)

2. Los vértices de un triángulo son A(– 2, 3), B(3, – 1) y C(7, 6), calcula la pendiente de cada uno de sus lados.

3. Una recta de pendiente – 2 pasa por el punto P(6, – 3). Si la abscisa de otro de sus puntos es – 3, halla su correspondiente ordenada.

4. Demuestra que el cuadrilátero cuyos vértices son: A(– 4, 2), B(– 1, – 2), C(7, 4) y D(0, 5) es un trapecio. Recuerda que un trapecio es un cuadrilátero con sólo un par de lados paralelos. ¿Cómo son las pendientes de rectas paralelas?______

5. Demuestra, aplicando el concepto de pendiente, que los puntos A(8, 6), B(4, 8) y C(2, 4) son los vértices de u triángulo rectángulo.

Respuestas:

1. a) θ = 45º b) θ = 135º c) θ = 90º

2. $m_{AB} = -\frac{4}{5}$, $m_{BC} = \frac{7}{4}$, $m_{AC} = \frac{1}{3}$

3. Ordenada igual a 15.

- División de un segmento en una razón dada

Consideremos los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ y la recta que determinan. Sea $P(x, y)$ un tercer punto que divida al segmento en la razón $\frac{P_1P}{PP_2} = r$. Como P_1P y PP_2 son del mismo sentido, dicha razón es positiva. Si el punto de división $P(x, y)$ estuviera situado en la prolongación del segmento, a uno u otro lado del mismo, la razón $\frac{P_1P}{PP_2} = r$ sería negativa, ya que P_1P y PP_2 tendrían sentidos opuestos.

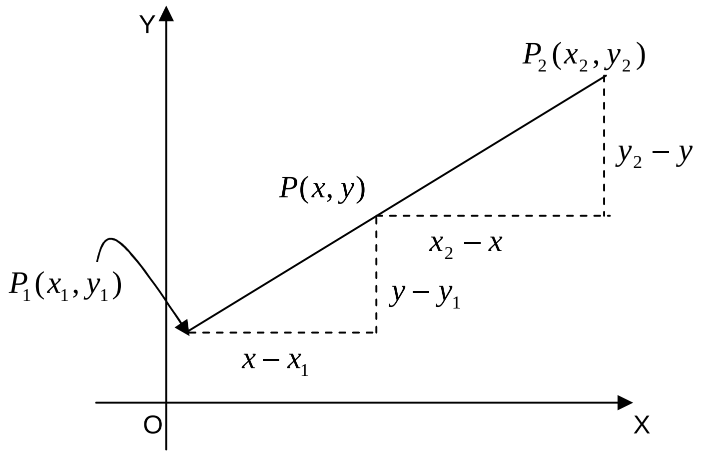
Teniendo en cuenta los **triángulos semejantes** de la figura, $\frac{P_1M}{PN} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{P_1P}{PP_2} = r$

Despejando x, de $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = r \quad \Rightarrow \quad x - x_1 = r(x_2 - x) \quad \Rightarrow \quad x - x_1 = rx_2 - rx$

$x + rx = rx_2 + x_1 \quad \Rightarrow \quad x(1 + r) = x_1 + rx_2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$.

Análogamente, $y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$.

Si $P(x, y)$ es el punto medio del segmento P_1P_2, $r = 1$ y $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.



EJERCICIOS RESUELTOS

1. Halla las coordenadas de un punto $P(x,y)$ que divida al segmento determinado por $P_1(1,7)$ y $P_2(6,-3)$ en la razón $r=\frac{2}{3}$.

Solución: Como la razón es positiva, P_1P y PP_2 son del mismo sentido, por tanto, el punto $P(x,y)$ está situado entre los puntos dados extremos del segmento.

$$r=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{1+\frac{2}{3}(6)}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1+4}{\frac{5}{3}}=\frac{15}{5}=3 \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{7+\frac{2}{3}(-3)}{1+\frac{2}{3}}=\frac{7-2}{\frac{5}{3}}=\frac{15}{5}=3$$

El punto buscado es (3, 3).

2. Halla las coordenadas de un punto $P(x,y)$ que divida al segmento determinado por $P_1(-2,1)$ y $P_2(3,-4)$ en la razón $r=-\frac{8}{3}$

Solución: Como la razón es negativa, P_1P y PP_2 son de sentido opuesto, con lo que el punto $P(x,y)$ será exterior al segmento P_1P_2. $\quad r=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{8}{3}$

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{-2+\left(-\frac{8}{3}\right)(3)}{1+\left(-\frac{8}{3}\right)}=\frac{-2-8}{-\frac{5}{3}}=\frac{30}{5}=6$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{1+\left(-\frac{8}{3}\right)(-4)}{1+\left(-\frac{8}{3}\right)}=\frac{1+\frac{32}{3}}{-\frac{5}{3}}=\frac{\frac{35}{3}}{-\frac{5}{3}}=-\frac{35}{5}=-7$$

Por lo que el punto buscado es (6, – 7).

3. El extremo de un diámetro de una circunferencia de centro $P_1=(-4,1)$ es $P_2=(2,6)$. Halla las coordenadas $P(x,y)$ del otro extremo.

Solución:

$r = \frac{P_1P}{PP_2} = -\frac{1}{2}$ como P_1P y PP_2 son de sentido opuesto, la razón r es negativa.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{-4 + \left(-\frac{1}{2}\right)(2)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)} = -10 \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(6)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)} = -4$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla las coordenadas de un punto P(x, y) que divida al segmento que determinan $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ en la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$.

a) $P_1(4,-3),\ P_2(1,4),\ r = \frac{2}{1}$ b) $P_1(5,3),\ P_2(-3,-3),\ r = \frac{1}{3}$

c) $P_1(-2,3),\ P_2(3,-2),\ r = \frac{2}{5}$ d) $P_1(0,3),\ P_2(7,4),\ r = -\frac{2}{7}$

2. Sabiendo que el punto (9, 2) divide al segmento que determinan los puntos $P_1(6,8)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la razón $r = \frac{3}{7}$, Halla las coordenadas de P_2.

3. El segmento que une el punto A(– 2, – 1) con el punto B(3, 3); se prolonga hasta C. Sabiendo que BC = 3 AB, determina las coordenadas del punto C.

Respuestas:

1. a) $\left(2,\frac{5}{3}\right)$, b) $\left(3,\frac{3}{2}\right)$, c) $\left(-\frac{4}{7},\frac{11}{7}\right)$ d) $\left(-\frac{14}{5},\frac{13}{5}\right)$.

2. (16, – 12).

3. C(18, 15)

2.3 Estudio analítico de algunos lugares geométricos en el Plano Cartesiano

LOS DOS PROBLEMAS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA SON:

1. Dada una ecuación, hallar el lugar geométrico que representa.
2. Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

LUGAR GEOMÉTRICO o gráfica de una ecuación de dos variables es una línea, recta o curva, que contiene todos los puntos, y solo ellos, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada.

El primer problema de la Geometría Analítica, que acabamos de mencionar, es que dada la ecuación de un lugar geométrico construir la gráfica que corresponde a dicho lugar.

Se procede en primer término a elaborar una tabla, asignando valores arbitrarios a una de las variables para obtener, de este modo, el valor o valores de la otra. Elaborada la tabla, se sitúan los puntos que tienen la propiedad común expresada por la ecuación y se unen por una recta o curva si procede. De esta manera, se tiene la gráfica del lugar geométrico de la ecuación dada.

También es importante calcular las intersecciones con los ejes, que son las distancias (positivas o negativas) desde el origen hasta los puntos en los que la línea del lugar corta a los ejes coordenados. Para calcular la intersección con el eje x se hace $y=0$ en la ecuación dada y se despeja la variable x. De igual manera, para obtener la intersección con el eje y, se hace $x=0$ y se despeja y.

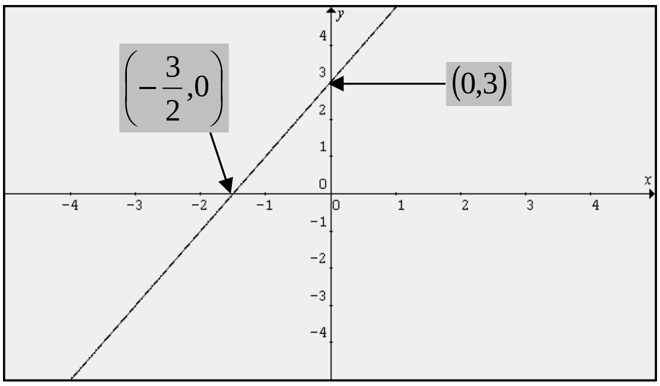
EJERCICIOS RESUELTOS

Representa Gráficamente el lugar geométrico de las ecuaciones siguientes:

1. **y = 2x + 3**

Tabla

x	y
– 2	– 1
0	3
1	5



El lugar geométrico es una recta

Veamos las intersecciones con los ejes.

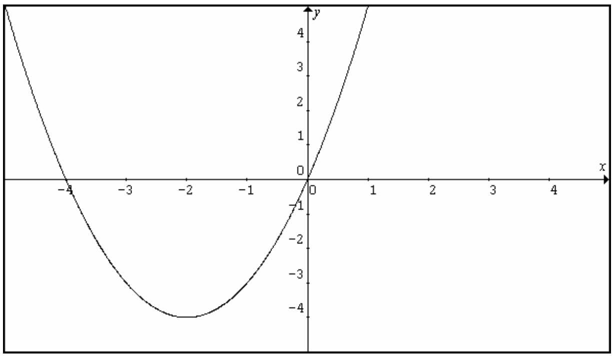
Si $x=0$ entonces $y=2(0)+3$ esto implica que $y=3$, es decir, el punto de intersección con el eje y es en el punto $(0,3)$.

Si $y=0$ entonces $2x+3=0$ esto implica que $2x=-3,\quad x=-\frac{3}{2}$, es decir, el punto de intersección con el eje x es el punto $\left(-\frac{3}{2},0\right)$.

2) **$y = x^2 + 4x$**

Tabla

x	y
– 5	5
– 4	0
– 2	– 4
0	0
1	5



El lugar geométrico es una parábola

Intersecciones con los ejes:

Si $x=0$, $\quad y=0^2+4(0); \quad y=0$, esto nos indica que la parábola interseca a los ejes en el origen.

Si $y=0, \quad x^2+4x=0; \quad x(x+4)=0;$ esto es, $x=0 \quad x=-4$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Construye las gráficas de las ecuaciones siguientes:

1) $y=3x+5$ 2) $3x+2y=12$ 3) $x^2-16y-16=0$

Respuestas:

1) Recta 2) Recta 3) Parábola

El otro problema fundamental de la Geometría Analítica consiste en encontrar la ecuación del lugar geométrico, que corresponde a una serie de puntos que tienen una propiedad común.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes de $A(-2,3)$ y $B(3,-1)$.

Solución:

Sea $P(x,y)$ el punto móvil.

El lugar geométrico del punto debe cumplir la condición $\overline{PA} = \overline{PB}$, es decir,

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2$$

Desarrollando y simplificando resulta:

$$10x - 8y + 3 = 0$$

Esta es la ecuación de la mediatriz del segmento que une los puntos dados.

2) Obtén el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al punto fijo $C(2,-1)$ sea igual a 5.

Distancia $PC = 5$, es decir, $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 5$

Elevando al cuadrado tenemos $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$

Desarrollando $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 25$

Simplificando $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$

Este lugar geométrico es una circunferencia de centro (2, – 1) y de radio 5.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro (0, – 3) y radio 3.
2. Un punto se mueve de tal manera que sus distancias a los puntos A(5, – 4) y B(– 3, 2) es siempre constante. Obtén la ecuación del lugar geométrico de dicho punto.
3. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x, y) equidistantes del punto fijo f(3, 2) y del eje y.

Respuestas:

1. $x^2 + y^2 + 6y = 0$
2. $4x - 3y = 7$
3. $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$

UNIDAD 3   LA RECTA Y SU ECUACION CARTESIANA

Propósitos:

Reafirmar el conocimiento del método de la Geometría Analítica, encontrando ecuaciones de rectas, avanzar en la solución analítica de problemas afines.

RECTA

Definición. Es el lugar geométrico de todos los puntos P *(x, y)* tales que si tomamos al azar dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ el valor de $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ siempre permanece constante.

PENDIENTE

Se define a la pendiente de una recta como la tangente del ángulo de inclinación. Y se designa por la letra m

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 **son paralelas, sí** $m_1 = m_2$

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 **son perpendiculares, sí** $m_1 \cdot m_2 = -1$ **es decir:**

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

ECUACIÓN DE LA RECTA

PUNTO - PENDIENTE

Dado que se conoce un punto y el valor de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ despejando obtenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

La ecuación de la recta de la forma punto pendiente

Requisitos para obtener la ecuación de una recta.

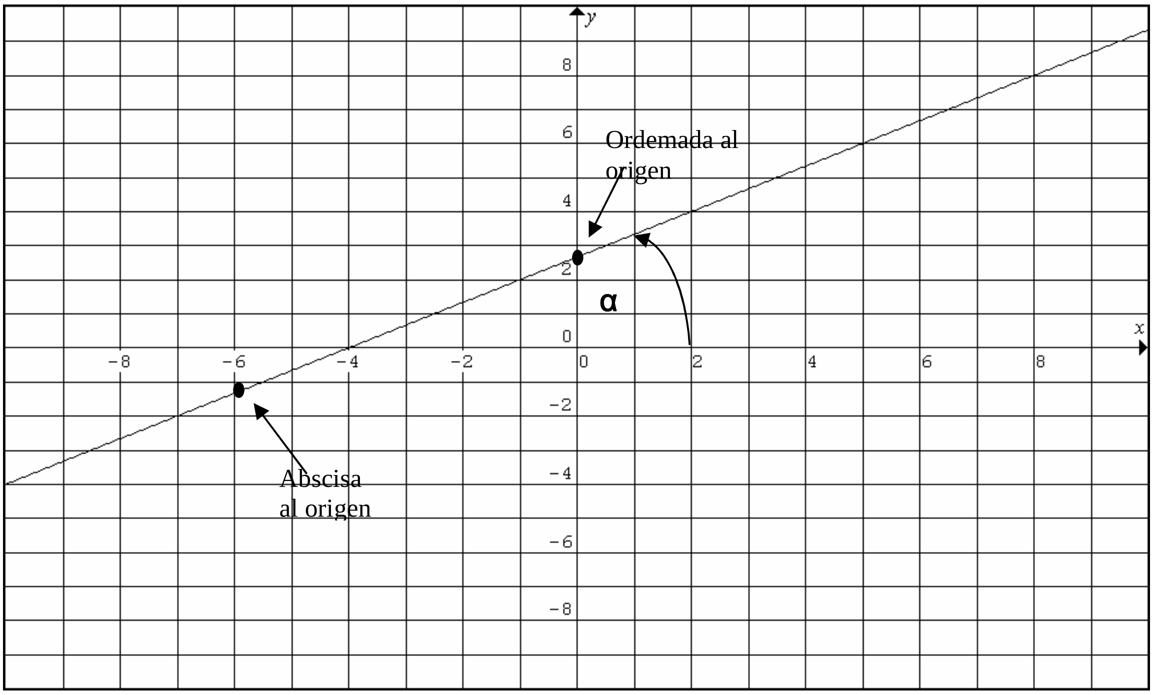
1. Pendiente
2. Un punto

Ejemplo 1

Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2, 4) , B (– 1, 2)

Primero .

Graficaremos la recta



Segundo .

Calcularemos la pendiente de la recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m = \frac{2-4}{-1-2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

Tercero

Calculamos la ecuación de la recta utilizando la ecuación punto – pendiente

Tomando la pendiente calculada y cualquiera de los dos puntos

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - (-1))$$

$$3(y - 2) = 2(x + 1)$$

$$3y - 6 = 2x + 2$$

Simplificando y ordenando tenemos 2x – 3y +8 =0

Ángulo de inclinación de la recta

Si la pendiente es igual a $\frac{2}{3}$

La tangente será igual $\frac{2}{3}$ = 0.66

Su ángulo de inclinación será

$\alpha = ang\ \tan 0.66 = 33.42° = 33°25'29''$

ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU FORMA SIMÉTRICA

Con los datos de la recta anterior .

Para obtener la ecuación de la recta en su forma simétrica se tiene que calcular las coordenadas al origen de la recta.

Así si la recta es:

2x – 3y + 8 =0

Para calcular las coordenadas al origen recurrimos a las siguientes ecuaciones

Abscisa al origen

$a = \frac{-c}{A}$ $\therefore$ $a = \frac{-8}{2} = -4$ la coordenada será (– 4 , 0)

Ordenada al origen

$b = \frac{-c}{B}$ $\therefore$ $a = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$ la coordenada será (0, $\frac{8}{3}$)

ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU FORMA SIMÉTRICA

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Con los datos anteriores tendremos que:

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{\frac{8}{3}}=1 \quad \textit{simplificando} \quad -\frac{x}{4}+\frac{3y}{8}=1$$

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Si queremos calcular las ecuaciones de las rectas perpendiculares y paralelas a la recta dada.

Ejemplo

Queremos la ecuación de la recta paralela y perpendicular a la recta

L_1 5x– 2y +4 =0 que pasen por el punto P(2,7)

1° Obtenemos la pendiente de la recta dada

$$m = \frac{-A}{B}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}$$

Como las rectas paralelas tienen la misma pendiente, la pendiente de la recta paralela (L_2) a la recta 5x – 2y+4=0 es $m_2=\frac{5}{2}$

Como sabemos que la recta paralela pasa por el punto P (2, – 3) utilizamos la ecuación Pendiente – Punto para obtener la ecuación de la recta paralela en su forma general

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y+3=\frac{5}{2}(x-2)$$
$$2(y+3)=5(x-2)$$
$$\textit{recta paralela} \quad 5x-2y-16=0$$

La ecuación de la recta perpendicular a la recta dada

Pendiente de la recta perpendicular es inversa y negativa

Así que $m_3 = -\frac{2}{5}$

Y queremos que pase por el punto P (2, – 3)

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 3 = -\frac{2}{5}(x - 2)$

$5(y + 3) = -2(x - 2)$

$recta\ \ perpendicular \quad 2x + 5y + 11 = 0$

Ejercicios

1.- Grafica y encuentra la ecuación de la recta que:

a) Pasa por el punto (1,5) y tiene pendiente m=2.

b) Pasa por (– 6, – 3) y tiene un ángulo de inclinación de 45°.

c) Su pendiente m = – 3 y su intersección con el eje Y es – 2.

d) Pasa por los puntos (4,2) y (– 5,7).

e) Su intersección con X es en 2 y con Y en – 3.

Soluciones:

a) 2x – y+3=0, b) x – y+3=0, c) 3x+y+2=0, d) 5x + 9y– 38=0, e) 3x – 2y – 6=0.

2. En cada uno de los siguientes incisos, encuentra:

- La pendiente de la recta.
- El ángulo de inclinación de la recta que determinan los dos puntos, haga el dibujo.

a) (– 1, – 4), (3, – 6)

b) (0,0), (– 6,7)

c) (– 2, – 5), (6,4)

d) (3,7), (3, – 5)

e) (3, 6), (– 7, – 6)

f) (2, – 4), (2,3)

3-Demuestra que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son rectángulos.

a) H(0,9) , P(– 4,– 1) , T(3,2)
b) L(– 2,8) , D(– 6,1) , R(0,4)

4.-Halla la ecuación simétrica de la recta que pasa por los puntos C (– 3,– 1) y

D (2,– 6). (Solución: $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-4}=1$).

5.-Enuncia la condición de paralelismo y encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto R(– 6,3) y es paralela a la recta que determinan los puntos

N(– 1,6) y G(4,– 7). (Solución: 13x + 5y + 63 = 0)

6.-Da la condición para que dos rectas sean perpendiculares y encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento A(4, 8) y B(– 3 ,– 5). (Solución: 7x + 13y – 23 = 0)

7.-Halla la ecuación de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan en la recta cuya ecuación es 4x + 5y – 40 = 0

(Solución: 5x – 4y – 9 = 0)

8.-Halla el área del triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados y la recta que tiene como ecuación 5x+4y+20=0.

(Solución: A = 10 u^2)

9.-Halla la ecuación de la recta que tiene como pendiente m =– 4 y pasa por el punto de intersección de las rectas 2x + y – 8 = 0 y 3x – 2y +9 = 0.

(Solución: 4x+y– 10=0)

10.-En el triángulo de vértices A (– 2,1), B (4,7) y C (6,– 3). Halla:

a) Las ecuaciones de sus lados.
b) La ecuación de la recta que pasa por A y es paralela al lado BC.
c) Las ecuaciones de las medianas y su punto de intersección, llamado Baricentro.
d) Las ecuaciones de sus mediatrices y su punto de intersección llamado Circuncentro.

Soluciones:

a) AB: x– y+3=0, BC: 5x+y– 27=0, AC: x+2y=0.
b) 5x+y+9=0.
c) (8/3, 5/3).
d) (10/3,5/3).

UNIDAD 4 CIRCUNFERENCIA, ELIPSE Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS

Propósitos:

Reafirmar el método analítico al obtener ecuaciones de la elipse y la circunferencia encontrando ecuaciones de circunferencia y elipse ampliando el conocimiento de curvas y la solución analítica de problemas euclidianos.

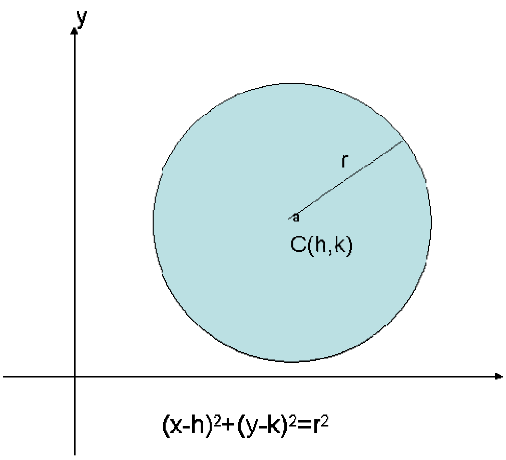
CIRCUNFERENCIA

Definición

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia a un punto fijo es siempre constante. El punto fijo es el centro de la circunferencia y la distancia constante se llama radio.

Ecuación Ordinaria de la Circunferencia

La ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto (h, k) y cuyo radio es la constante r es:



Cálculo de la ecuación de la circunferencia

Ejemplo

Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (3, 5) y su centro se encuentra en el punto (– 1,– 2)

Para calcular el radio sustituimos el centro y el punto por el que pasa la circunferencia.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(3+1)^2+(5+2)^2=r^2$$
$$16+49=r^2$$
$$65=r^2$$
$$\sqrt{65}=r$$

Tomando el valor del radio sustituimos el centro en la ecuación y encontramos la ecuación cartesiana de la circunferencia

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x+1)^2+(y+2)^2=(\sqrt{65})^2 \quad \textit{ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria}$$
$$x^2+2x+1+y^2+4y+4=65$$
$$x^2+y^2+2x+4y-60=0 \quad \textit{ecuación de la circunferencia en su forma general}$$

Ejercicios

1.- Halla la ecuación de la circunferencia que:

a) Tiene su centro en C(– 3,– 5) y su radio es 7.

b) Los extremos de uno de sus diámetros son los puntos (2,3) y (– 4,5)

c) Su centro es el punto C(7,– 6) y pasa por (2,2).

d) Pasa por los puntos (0,0), (3,6), (7,0).

e) Pasa por los puntos (2,– 2), (– 1,4), (4,6).

f) Pasa por los puntos (4,– 1), (0,– 7), (– 2,– 3).

Soluciones:

a) $(x+3)^2+(y+5)^2=49$;

b) $(x+1)^2+(y-4)^2=10$;

c) $(x-7)^2+(y+6)^2=89$;

d) $x^2+y^2-7x-4y=0$;

e) $6x^2+6y^2-32x-25y-34=0$;

f) $7x^2+7y^2-22x+52y+21=0$

CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DE LA CIRCUNFERENCIA

EJEMPLO Calcula el centro y radio de la circunferencia

$$2x^2+2y^2+4x+8y-20=0$$
$$\textit{dividimos todo entre } 2$$
$$x^2+y^2+2x+4y-10=0$$
$$\textit{ordenamos y completamos cuadrados}$$
$$x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2+y^2+8y+\left(\frac{8}{2}\right)^2=20+\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2$$
$$x^2+4x+4+y^2+8y+16=20+4+16$$
$$\textit{factorizamos}$$
$$(x+2)^2+(y+4)^2=40$$
$$\textit{por lo tanto}$$
$$C(-2,-4) \qquad r=\sqrt{40}$$

Ejercicios

1.-A partir de la siguiente ecuación halla el centro y radio. Grafica la circunferencia, si existe.

a) $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$, b) $36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0$,

c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 29 = 0$

(Soluciones: a) C (5/2,– 3/2), r= 4; b) Un punto P(– 2/3,3/2), r=0; c) No existe el lugar geométrico.)

2.- Encuentra la ecuación de la tangente a la circunferencia en el punto P(– 2,– 5) con centro en C(4,3).
(Solución: $3x + 4y + 26 = 0$)

3.- Encuentra la ecuación de la recta tangente en el punto de tangencia P(1,3), al círculo con centro C(– 1,– 1).
(Solución: $x + 2y - 7 = 0$)

4.- Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$, en el punto de tangencia P(4 ,5).

(Solución: $5x + 4y - 40 = 0$)

5.- Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia

$10x^2 + 10y^2 - 30x + 20y - 100 = 0$, en el punto de tangencia P(5,2).
(Solución: $7x + 6y - 47 = 0$)

6.- La ecuación de la circunferencia es $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$. Halla la ecuación de la recta tangente a este círculo en el punto de tangencia P(6,7). (Solución: $x + 2y - 20 = 0$)

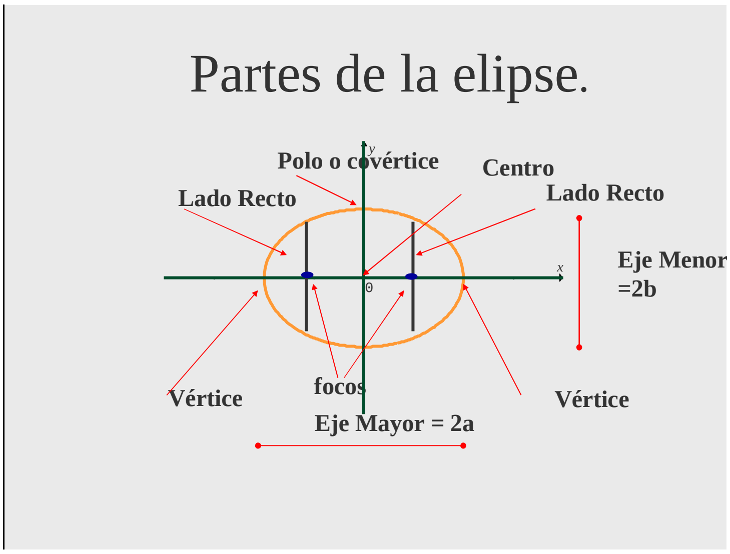
7.- Halla la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - 2y - 24 = 0$ y $2x + 7y + 9 = 0$.

(Solución: $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0$)

ELIPSE

Definición

Es un lugar geométrico que describe un punto que se mueve en un plano tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es siempre igual a una constante.

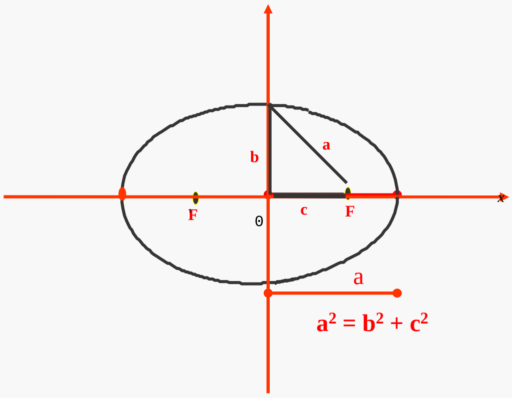


Ecuación general de la elipse

- $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

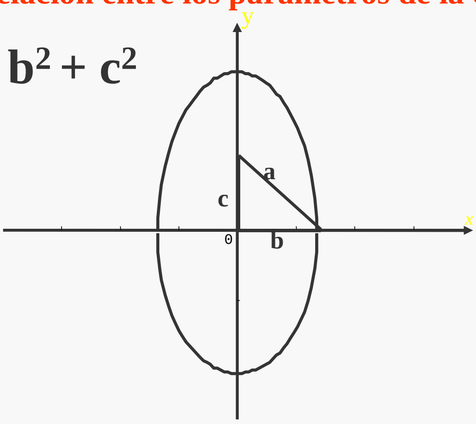
- Características:
  $A \neq C$ y Positivos

Relación entre los parámetros de la elipse

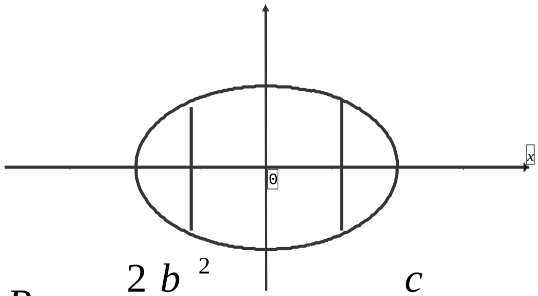


Relación entre los parámetros de la elipse

$$a^2 = b^2 + c^2$$

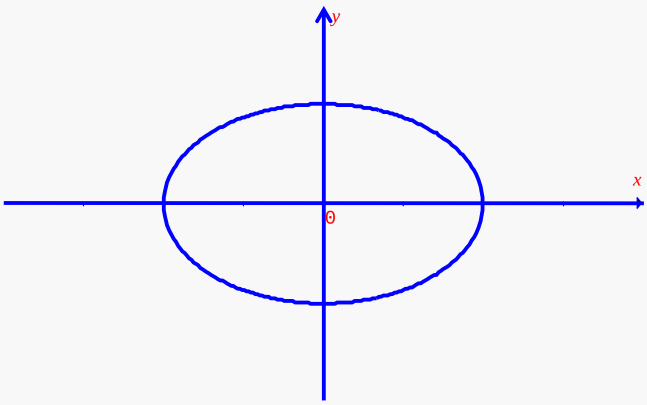


Lado recto y excentricidad



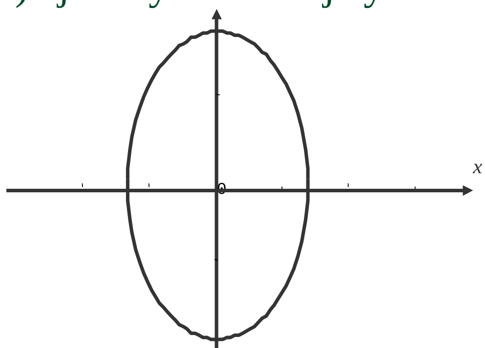
$$L.L.R = \frac{2b^2}{a} \qquad e = \frac{c}{a}$$

Ecuación canónica de la elipse C (0,0) eje mayor en el eje x



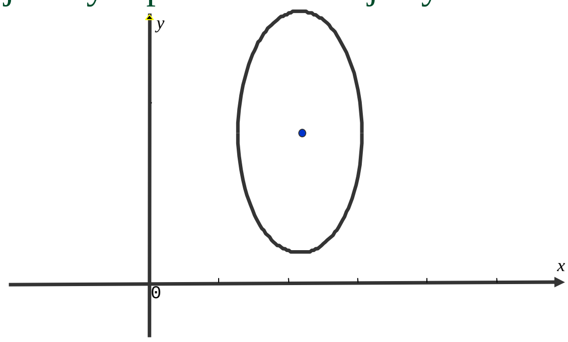
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación canónica de la elipse
C(0,0) eje mayor en el eje y



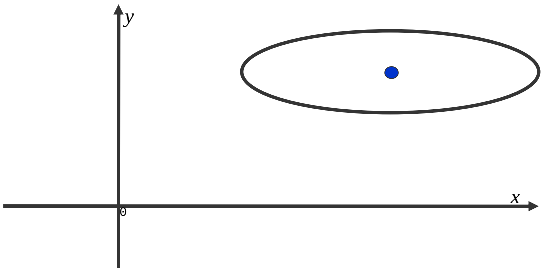
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ecuación canónica de la elipse C (h,k),
eje mayor paralelo al el eje “y”



$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación canónica de la elipse
C (h,k), eje mayor paralelo al el eje “x”



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Ejemplo.

Calcula la ecuación de la elipse si sus vértices se encuentran en las coordenadas (– 3,7) y (– 3,– 1) y la longitud de su lado recto es 2

Como los vértices se encuentran sobre el eje focal y las coordenadas – 3 se repiten el eje focal es paralelo al eje “y” por lo tanto la ecuación que utilizaremos será

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

El centro es el punto medio entre los dos vértices por lo tanto C(– 3,3)

La distancia entre los dos vértices es igual a 8 y esto es igual a la longitud del eje mayor de tal forma que : 2 a = 8, a = 4 , $a^2 = 16$

Si la longitud del lado recto es igual a

$$\frac{2b^2}{a}=2 \; como \; a=4$$

$$2b^2=8$$

$$b=2$$

Por lo tanto la ecuación de la elipse en su forma ordinaria será

$$\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$$

Ejercicios

1.- Encuentra la ecuación de la elipse que:

a) Tiene sus vértices en los puntos (4,0) y (– 4,0) y sus focos en (3,0) y (– 3,0).
b) Tiene sus vértices en los puntos (0,6) y (0,– 6) y sus focos (0,4) y (0,– 4).
c) Sus focos son (2,0) y (– 2,0) y su excentricidad es 2/3.
d) Tiene sus focos en (3,8) y (3,2) y la longitud de su eje mayor es 10.
e) Sus vértices son (– 3, – 1) y (5, – 1) y su excentricidad es ¾.
f) Sus vértices son (2,6) y (2, – 2) y la longitud de su lado recto es 2.

Soluciones:

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$;

b) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1$;

c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$;

d) $25x^2 + 16y^2 - 150x - 160y + 225 = 0$;
e) $7x^2 + 16y^2 - 14x + 32y - 89 = 0$;
f) $4x^2 + y^2 - 16x - 4y + 4 = 0$.

2.- Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como gráfica a una elipse:

a) $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 5 = 0$
b) $x^2 + 3y^2 - x - 6 = 0$
c) $3x^2 - 2y^2 + 4x - 3y = 0$
d) $-2x^2 + 5y^2 + 6x = 0$
e) $4x^2 + 3y - 8 = 0$
f) $5x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0$

g) $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$

h) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$

i) $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y+6)^2}{2}=1$

j) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$

k) $\frac{(x+3)^2}{4}+y^2=1$

l) $x^2-\frac{(y-3)^2}{4}=1$

Solución: a, b, f, g, h, k

3.- De las siguientes ecuaciones que tienen como gráfica una elipse, cuáles son elipses horizontales y cuáles son verticales.

a) $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

b) $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$

c) $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y+6)^2}{2}=1$

d) $(x-2)^2+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

e) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{6}=1$

f) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

g) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y = 0$

h) $-3x^2 - y^2 + 4x + y + 6 = 0$

i) $x^2 + 2y^2 + 3x - 8 = 0$

j) $x^2 + 2y^2 - 3x - 6 = 0$

Respuestas:
Horizontal: b, c, f, g, i, j
Vertical: a, d, e, h

4.- Para cada una de las siguientes elipses encuentra:
Las coordenadas del centro
La medida del eje mayor
La medida del eje menor

a) $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{16}=1$

b) $\dfrac{(x+3)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$

c) $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+8)^2}{4}=1$

d) $(x-3)^2+\dfrac{(y+4)^2}{4}=1$

e) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$

f) $\dfrac{x^2}{4}+(y+2)^2=1$

g) $\dfrac{(x-5)^2}{36}+y^2=1$

Respuestas:

Coordenada del centro	Eje mayor	Eje menor
a) (3, – 3)	8	4
b) (– 2, 3)	8	6
c) (2, – 8)	10	4
d) (3, – 4)	4	2
e) (0, 0)	8	4
f) (0, – 2)	4	2
g) (5, 0)	12	2
h) (1, – 2)	6	4.9
i) (0, 2)	4	2
j) (2, – 3)	8.48	6.92

UNIDAD 5   LA PARÁBOLA Y SU ECUACION CARTESIANA

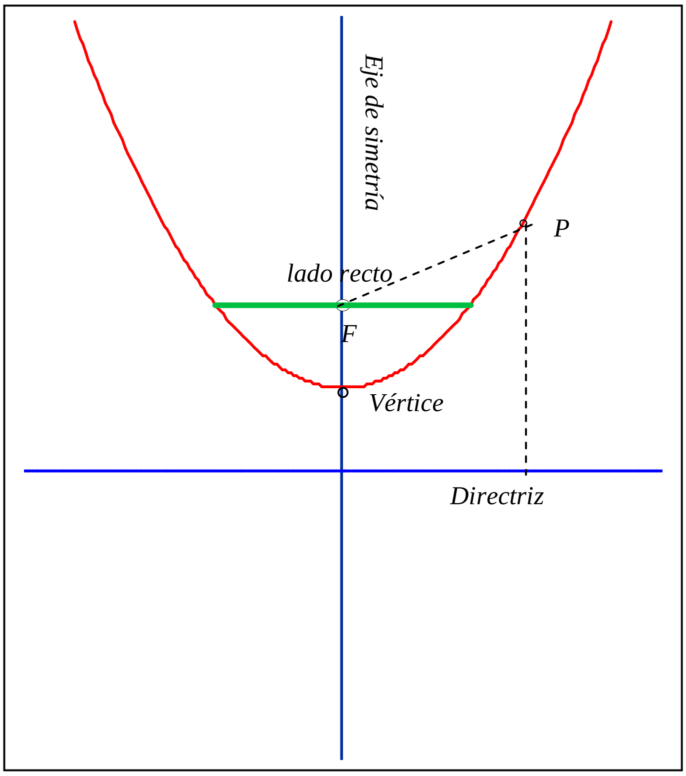
Propósitos:

Consolidar el manejo de los métodos analíticos a través del estudio de la ecuación de la parábola. Avanzar en el reconocimiento de formas, estructuras y procedimientos, al resolver diversos problemas que involucren tanto a la parábola como a otros lugares geométricos ya vistos.

Definición: Lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado foco **F** y de una recta fija ***r*** llamada directriz. Cualquier punto P de la parábola cumple:

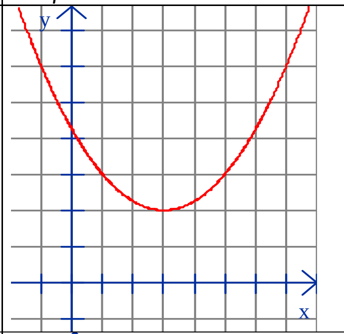
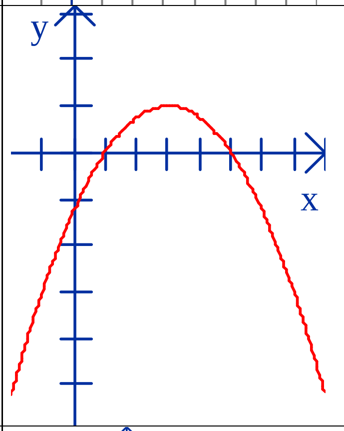
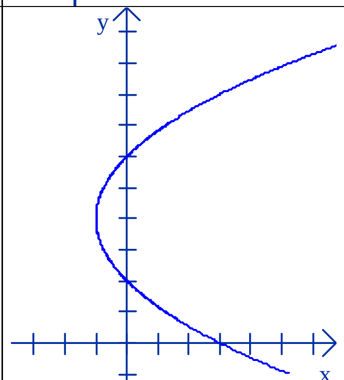
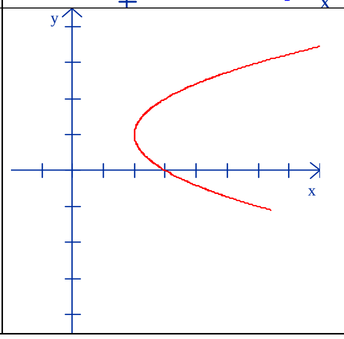
$$d\,(P, F\,) = d\,(P, r\,)$$

Elementos de una parábola



Ecuaciones de la parábola
Ver temas de geometría Analítica pags. 669-680 Swokowski

Ecuación Ordinaria de la parábola con sus elementos

Ecuación	*Gráfica*	*Eje de simetría*	*Foco*	*directriz*
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$		$x = h$	$(h, k+p)$	$y = k-p$
$(x-h)^2 = -4p(y-k)$		$x = h$	$(h, k-p)$	$y = k+p$
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$		$y = k$	$(h+p, k)$	$x = h-p$
$(y-k)^2 = -4p(x-h)$		$y = k$	$(h-p, k)$	$x = h+p$

EJERCICIOS

1. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como gráfica a una parábola?

a) $2x^2+3y^2-5x+4=0$

b) $x^2+y^2-3x-6=0$

d) $-x^2+2x-3y=0$

e) $x+y^2+4=0$

f) $(x-2)^2+(y+3)^2=25$

h) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$

i) $(y-2)^2=5(x+2)$

j) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

k) $y^2=x-8$

l) $x^2=6(y-4)$

m) $y=4x-8$

n) $y=3x^2+6x-10$

o) $x=3y+4$

p) $x=y^2-5$

Respuesta: d, e. g, i, k, l, n, p

2. De las siguientes ecuaciones que tienen como gráfica una parábola, ¿Cuáles son parábolas horizontales y cuales son verticales?

a) $(x-3)^2=-8(y-4)$

b) $(y-2)^2=4(x+3)$

c) $(x+4)^2=6(y+5)$

d) $(y+3)^2=-16(x-2)$

e) $2x^2+4x-3y+5=0$

f) $x^2-2x+y-3=0$

g) $x+y^2-3y+8=0$

h) $2x-3y^2+6=0$

I) $y^2=-3(x+4)$

j) $(x-5)^2=4y$

k) $y=3x^2+4x$

l) $y=x^2-5$

m) $x=4y^2+6$

n) $x=3y^2-8$

Respuesta: Verticales: a, c, e, f, j, k, l

Horizontales: b, d, g, h, i, m, n

3. De las siguientes ecuaciones que tienen como gráfica una parábola vertical, ¿Cuáles se abren hacia arriba y cuales hacia abajo?

a) $(x-2)^2 = 3(y-6)$
b) $(x-2)^2 = -3(y+6)$
c) $(x+6)^2 = 2(y-5)$
d) $x^2 = -4(y+5)$
e) $x^2 = -6y$
f) $(x+3)^2 = -5y$
g) $(x-8)^2 = y-4$
h) $3(y-8) = (x+1)^2$
i) $x^2 + 4x - 2y = 0$
j) $-3x^2 + 4y - 8 = 0$
k) $4x^2 + 3x + y = 0$
l) $2x^2 - 6x - y = 0$
m) $y = 3x^2 + 4x - 8$
n) $-2x^2 + 6x - 10$
o) $u = 4(x-2)^2 + 6$
p) $y = -3(x+5)^2 - 3$

Respuesta: abren hacia arriba: a, c, g, h, i, j, l, m, o

Abren hacia abajo: b, d, e, f, k, n, p

4. De las siguientes ecuaciones que tienen como gráfica una parábola horizontal ¿Cuáles abren hacia la derecha y cuales hacia la izquierda?

a) $(y+3)^2 = 5(x-8)$
b) $y^2 = 6x$
c) $(y+2)^2 = 4x$
d) $(y-5)^2 = -7(x+4)$
e) $y^2 = -6(x+3)$
f) $x+2 = (y-5)^2$
g) $3(x-4) = (y+6)^2$
h) $3x + 2y^2 - 5y + 4 = 0$
i) $-x + y^2 + 3y - 6 = 0$
j) $-2x - 3y^2 + 4y + 6 = 0$
k) $x - y^2 + 4x - 5 = 0$
l) $x = 3y^2$
m) $x = -3(y-2)^2 + 3$
n) $x = 2(y-3)^2$
o) $x = -4(y+2)^2 + 1$

Respuesta: abren hacia la derecha: a, b, c, f, g, i, k, l, n

Abren hacia la izquierda: d, e, h, j, m, o

5. De cada una de las siguiente parábolas encuentra:
    - Las coordenadas del vértice
    - La distancia del vértice al foco
    - Lo que mide el lado recto

a) $(x-3)^2 = 8(y+4)$

b) $(y+3)^2 = 4(x-1)$

c) $(y-2)^2 = -6(x+1)$

d) $(x+1)^2 = -12(y+4)$

e) $x^2 = 2(y-3)$

f) $(x+2)^2 = 4y$

g) $y^2 = -2x$

h) $x^2 + 4x - 2y + 8 = 0$

i) $2x^2 - 6y + 8 = 0$

j) $4x + 2y^2 - 8y = 0$

Respuesta

Vértice	*Distancia vértice-foco*	*Longitud del lado recto*
a) (3, – 4)	*2*	*8*
b) (1, – 3)	*1*	*4*
c) (– 1, 2)	*1.5*	*6*
d) (– 1, – 4)	*3*	*12*
e) (0, 3)	*0.5*	*2*
f) (– 2, 0)	*1*	*4*
g) (0, 0)	*0.5*	*2*
h) (– 2, 2)	*0.5*	*2*
i) (0, 2)	*.75*	*3*
j) (2, 2)	*.5*	*4*

6. Encuentra las coordenadas del foco de cada una de las siguientes parábolas. En cada caso dibuja la parábola

   a) $(x-2)^2 = 8(y-4)$

   b) $(x+3)^2 = 4(y+1)$

   c) $(y-4)^2 = -2(x-5)$

   d) $(y+2)^2 = -6(x+2)$

   e) $x^2 = -6(y-8)$

   f) $y^2 = -4x$

   g) $x^2 = 3y$

   h) $x^2 + 4x - 2y + 8 = 0$

   i) $2x^2 - 6y + 8 = 0$

   j) $4x + 2y^2 - 6y = 0$

Respuestas:

a) (2, 6) b) (– 3, 0) c) (4.5, 4) d) (– 3.5, – 2) e) (0, 6.5) f) (– 1, 0)
g) (0, 0.75) h) (– 2, 2.5) i) (0, 2.75) j) (1.5, 2)

7. Escribe la ecuación en la forma ordinaria de cada una de la parábola con las siguientes características.
   En cada caso dibuja la parábola

a) Vértice (1, 2) foco (1, 5)

b) Vértice (1, 2) foco (– 3, 2)

c) La parábola es horizontal y abre hacia la derecha, vértice (1, – 3) lado recto mide 8.

d) Vértice (0, 1), foco (0, – 2)

e) Vértice (2, 3), foco (6, 3)

f) La parábola es horizontal y abre hacia la izquierda, foco (2, 4), la distancia del foco al vértice es 2.

i) La parábola es vertical y abre hacia arriba, la distancia del vértice al foco es 4, vértice (2, 5)

8) Escribe la ecuación en la forma general para cada una de las siguientes parábolas. En cada caso dibuja la parábola.

a) La directriz de la parábola es la recta $y-1=0$, y su foco el punto (4, – 3)

b) La directriz de la parábola es la recta $x+5=0$, y su vértice es el punto (0, 3)

c) Pasa por los puntos A (0, 0), B (8, – 4), y C (3, 1) y el eje es paralelo al eje de las abscisas.

d) Pasa por el punto A (3, – 3), tiene como vértice el punto (4, – 1) y eje la recta $y+1=0$.

Respuestas:

a) $x^2-8x+8y+24=0$

b) $y^2-2ox-6y+9=0$

c) $y^2-x+2y=0$

d) $y^2+4x+2y-15=0$

BIBLIOGRAFIA

- BARNET, R. Precálculo. Álgebra, Geometría Analítica y Trigonometría. México, LIMUSA, 1998.

- CABALLERO, C. Arquímedes *et al.* Geometría Analítica. México, ESFINGE, 2003.

- FILLOY, E. Y HITT F. Geometría Analítica. México, Iberoaméricana, 2002.

- KINDLE H. JOSEPH. Geometría Analítica. México, McGraw-Hill, 1970. Colección Shaum's

- LEHMANN CH. Geometría Analítica. México, Limusa, 1990.

- LEITHOLD, L. Álgebra. México, HARLA, 1980.

- REES, P. y SPARKS, F. Álgebra. México, McGraw-Hill, 1994.

- SWOKOWSKI, E. y COLE, A. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México, Santillan, 2003.