UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL SUR

GUÍA DE ESTUDIO PARA MATEMÁTICAS II (ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA)

Elaborada por los profesores:

Josué Barrios Agapito
Gpe. Xochitl Chávez Pérez
Jorge Flores Serrano
Rubén B. Reyes Torres
Ma. de Lourdes Romero Miranda

Octubre de 2005

PRESENTACIÓN

Esta Guía contiene las cinco unidades del curso de Matemáticas II.

Para cada tema se señalan los objetivos, se da una breve explicación del tema, se exponen ejemplos resueltos y se proponen ejercicios, algunos con sus soluciones correspondientes, al final encontrarás la bibliografía sugerida.

Para que puedas tener éxito en tu examen, debes estudiar los ejemplos resueltos, resolver los ejercicios propuestos y verificar tus resultados. Si algún ejercicio no lo entiendes o no lo puedes resolver, puedes acudir con los profesores asesores que se encuentran en el edificio "R" junto a psicopedagogía.

Finalmente, recuerda que:

"El éxito está antes que el trabajo
solo en el diccionario".

ÍNDICE

Tema Pag.

1.- **FUNCIONES CUADRÁTICAS**..... 4
1.1 Funciones cuadráticas..... 4
1.2 Gráficas de funciones cuadráticas..... 5
1.3 Problemas que involucran funciones cuadráticas..... 13

2.- **CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS BÁSICAS**..... 19
2.1 Construcciones con regla y compás..... 19
2.2 Construcción de Triángulos..... 21
2.3 Circunferencia..... 27

3.- **CONGRUENCIA Y SEMEJANZA**..... 29
3.1 Congruencia..... 29
3.1.1 Rectas paralelas cortadas por una secante..... 29
3.1.2 Ángulos interiores y exteriores de un triángulo..... 32
3.2 Congruencia de triángulos..... 39
3.3 Semejanza y teorema de Pitágoras..... 44
3.3.1 Semejanza de triángulos..... 44
3.3.2 Teorema de Pitágoras..... 50

4.- **PERÍMETROS, ÁREAS Y VOLÚMENES**..... 55
4.1 Cálculo de perímetros, áreas y volúmenes..... 55

5.- **ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA**..... 61
5.1 Razones trigonométricas para ángulos agudos..... 62
5.2 Razones trigonométricas Recíprocas..... 65
5.3 Valores inversos de las razones trigonométricas..... 66
5.4 Identidades trigonométricas fundamentales..... 76
5.5 Ley de senos y cosenos..... 78

Bibliografía..... 86

1.- FUNCIONES CUADRÁTICAS

Objetivo: Identificar funciones cuadráticas, graficarlas y resolver problemas que involucren una función cuadrática.

1.1 Funciones cuadráticas

Definición:

Una función cuadrática tiene la forma

$f(x) = Ax^2 + Bx + C$ con $A \neq 0$

EJEMPLOS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

1) $f(x) = 5x^2 + 3x - 4$ $\quad A = 5, \quad B = 3, \quad C = -4$

2) $f(x) = -7x^2 + x + \frac{1}{4}$ $\quad A = -7, \quad B = 1, \quad C = \frac{1}{4}$

3) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x$ $\quad A = -1, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = 0$

4) $f(x) = x^2 - 3$ $\quad A = 1, \quad B = 0, \quad C = -3$

5) $f(x) = \frac{3}{4}x^2$ $\quad A = \frac{3}{4}, \quad B = 0, \quad C = 0$

6) $f(x) = x(2x - 3)$ $\quad A = 2, \quad B = -3, \quad C = 0$

Recuerda que para que sea función cuadrática: Sólo se requiere que $A \neq 0$

EJERCICIO

Indica cuáles de las siguientes expresiones representan una función cuadrática.

1) $f(x) = -2x + 3$

2) $f(x) = -7x^2 + 3x - \frac{1}{3}$

3) $f(x) = (-x)^2$

4) $f(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 2$

5) $f(x) = -7x + x^2$

6) $f(x) = (-x + 8)x$

7) $f(x) = 25x^2 - 2x$

8) $f(x) = -x + 1$

9) $f(x) = -2x^2 + 1$

10) $f(x) = -4 + 3x$

Solución:
Representan funciones cuadráticas: 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9.

1.2 **Graficas de funciones cuadráticas**

La gráfica de una función cuadrática es una parábola. Para graficar una función cuadrática uno de los métodos es tabular algunos valores de "x" y obtener los correspondientes valores de "y" para obtener algunos puntos y graficar; otro método es pasar de la forma: $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ a la forma: $f(x) = A(x-h)^2 + k$ donde el vértice de la parábola es el punto (h,k). Si $A < 0$ la parábola abre hacia abajo y si $A > 0$ la parábola abre hacia arriba; su eje de simetría es $x = h$. Para obtener dos puntos simétricos de la parábola se puede sustituir $x = h \pm 1$ en $f(x)$.
Es importante recordar que en la función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, C representa el punto de intersección con el eje "y" (ordenada al origen).

EJEMPLOS:

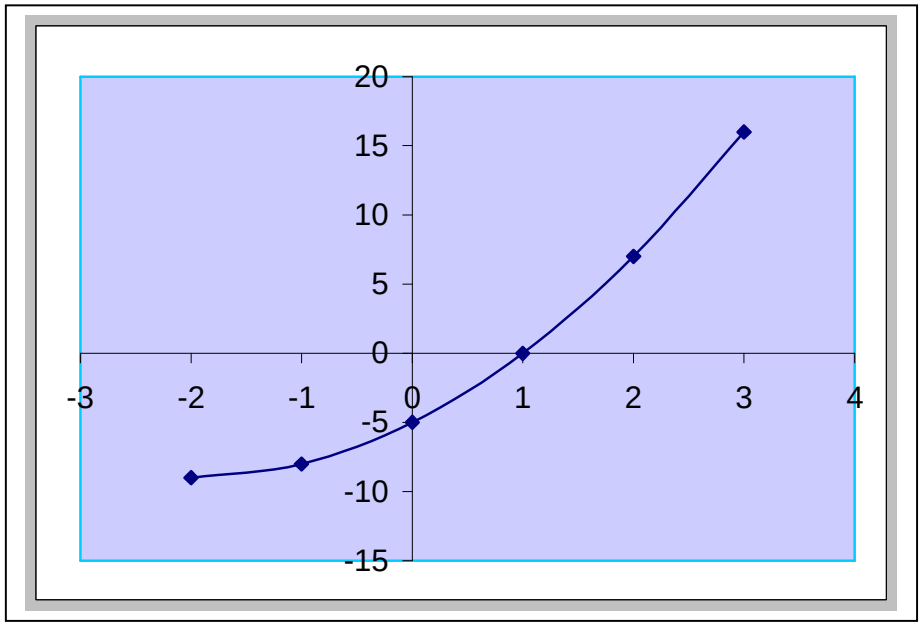
Graficar las siguientes funciones cuadráticas:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 5$

Para graficar esta función podemos hacer una tabulación con algunos valores para la variable x, como sigue:

x	$f(x) = x^2 + 4x - 5$	$f(x)$
-2	$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$	-9
-1	$f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) - 5 = 1 - 4 - 5 = -8$	-8
0	$f(0) = 0^2 + 4(0) - 5 = -5$	-5
1	$f(1) = 1^2 + 4(1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$	0
2	$f(2) = 2^2 + 4(2) - 5 = 4 + 8 - 5 = 7$	7
3	$f(3) = 3^2 + 4(3) - 5 = 9 + 12 - 5 = 16$	16

De esta tabulación obtenemos los siguientes puntos para graficar:
A(-2,-9), B(-1,-8), C(0,5), D(1,0), E(2,7) y F(3,16)
Los graficamos para obtener la parábola correspondiente.



La construcción de la gráfica sugiere tabular más valores de x para encontrar la representación gráfica completa de la parábola.
Otro método para graficar la parábola, consiste en transformar $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ a la forma $f(x) = A(x-h)^2 + k$ completando los cuadrados, como sigue:

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

$$f(x) = \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} \underset{\uparrow}{-5-4}$$

se resta para no alterar la función

$$f(x) = \underbrace{(x+2)^2}_{\text{El trinomio se puede expresar así}} \underset{\uparrow}{-9}$$

Es el resultado de los dos números

$\therefore$ $f(x) = (x+2)^2 - 9$ es la forma deseada y en esta expresión tenemos que:

$A = 1, \qquad h = -2, \qquad y \qquad k = -9$

Por lo que el vértice de la parábola es el punto $(-2,-9)$ y como $A = 1 > 0$, la parábola abre hacia arriba, su eje de simetría es $x = -2$ y dos puntos de la parábola se pueden obtener sustituyendo:

$x = -2 + 1 \qquad\qquad x = -2 - 1$
$x = -1 \qquad\qquad x = -3$

en $f(x) = (x+2)^2 - 9$

entonces:

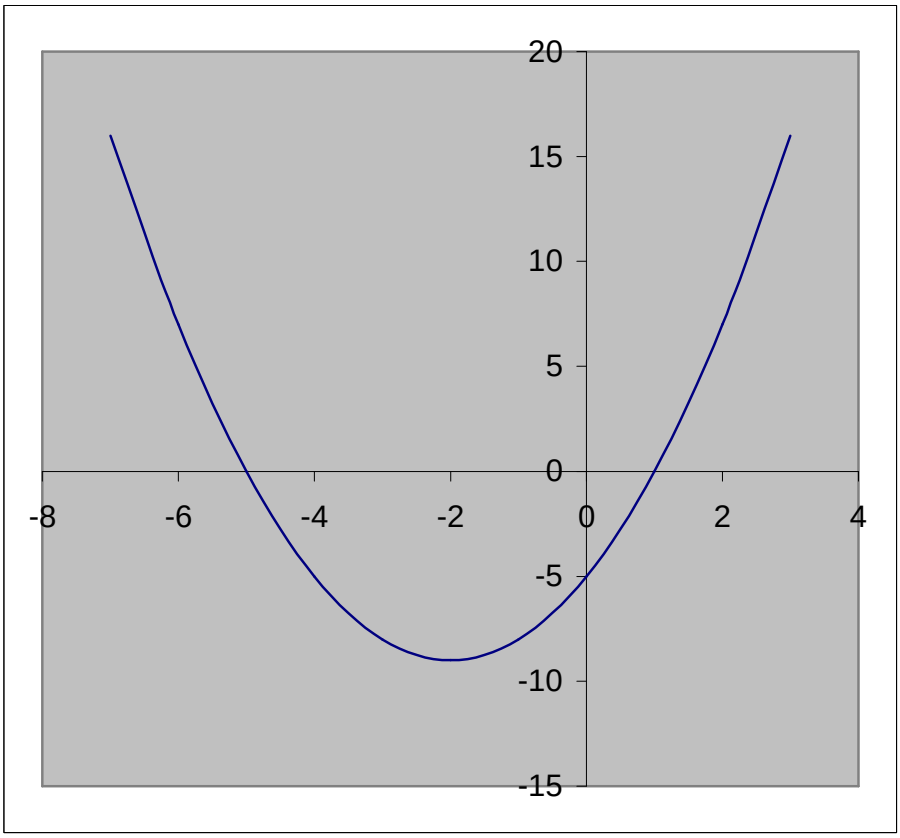
$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1+2)^2 - 9 \\ &= 1^2 - 9 \\ &= 1 - 9 \\ &= -8 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3+2)^2 - 9 \\ &= (-1)^2 - 9 \\ &= 1 - 9 \\ &= -8 \end{aligned}$$

$\therefore$ un punto de la parábola es A(-1,-8) y otro punto es B(-3,-8)

Por lo que su gráfica es:



Nota: observa que el punto de intersección con el eje " y " es -5

2) $f(x) = -2x^2 - 6x + 3$

Para pasar a la forma $f(x) = A(x-h)^2 + k$, primero factorizamos de la siguiente manera:

$$f(x) = -2(x^2 + 3x) + 3$$

Completamos cuadrados en el paréntesis y restamos $\left(\frac{9}{4}\right)(-2)$ para que no se altere la expresión

$$f(x) = -2\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + 3 - \left(\frac{9}{4}\right)(-2)$$
$$= -2\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + 3 + \frac{18}{4}$$
$$= -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}$$

de donde $A = -2, \quad h = -\frac{3}{2}, \quad y \quad k = \frac{15}{2}$

Entonces el vértice es $V\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$, el eje de simetría es $x = -\frac{3}{2}$, como $A = -2 < 0$ la parábola abre hacia abajo y para determinar dos puntos de la parábola sustituimos:

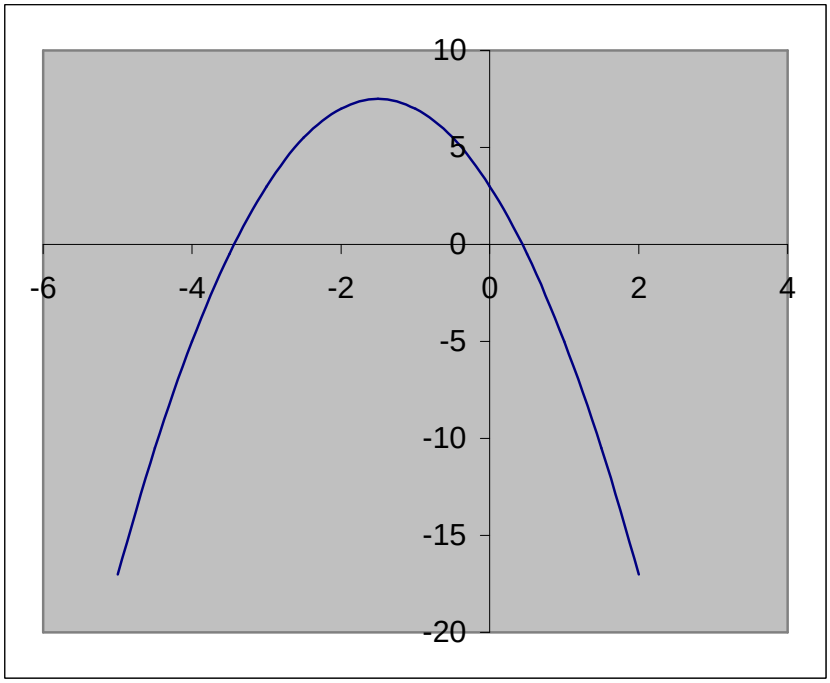
$$x = -\frac{3}{2} + 1 \qquad\qquad x = -\frac{3}{2} - 1$$
$$x = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad x = -\frac{5}{2}$$

en $f(x) = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{2} \qquad\qquad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -2\left(-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}$$
$$= -2(1)^2 + \frac{15}{2} \qquad\qquad = -2(-1)^2 + \frac{15}{2}$$
$$= -2 + \frac{15}{2} \qquad \text{y} \qquad = -2 + \frac{15}{2}$$
$$= \frac{11}{2} \qquad\qquad = \frac{11}{2}$$

$\therefore \; A\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$ y $\therefore \; B\left(-\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$

y el punto de intersección con el eje " y " es 3.



3) $f(x) = 7x^2 + 14x$

Factoricemos como sigue:

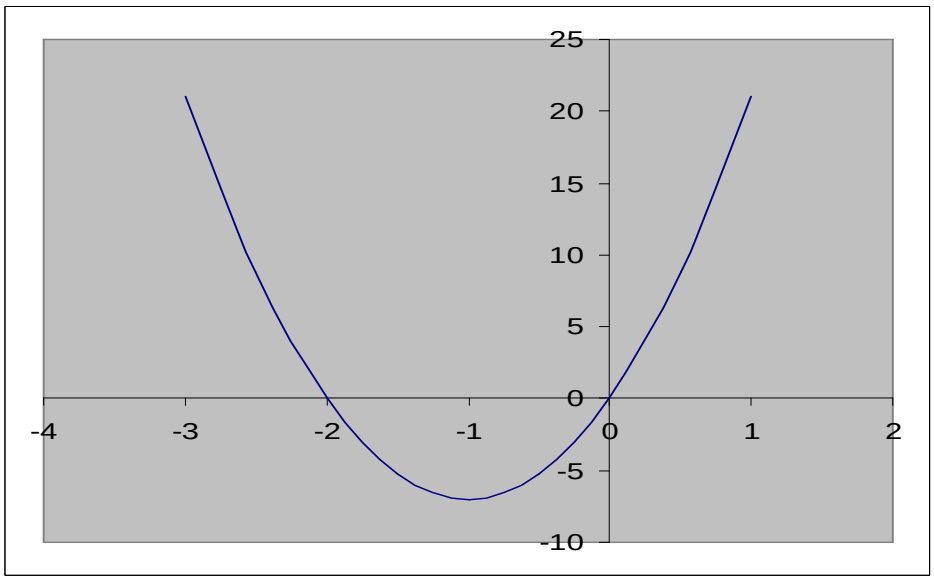
$$f(x) = 7(x^2 + 2x)$$

Completamos cuadrados, para que no se altere la expresión, le restamos la multiplicación de (7)(1).

$$f(x) = 7(x^2 + 2x + 1) - (7)(1)$$
$$f(x) = 7(x+1)^2 - 7$$

Como $A = 7 > 0,\quad h = -1 \quad y \quad k = -7$ entonces $V(-1,-7)$, su eje de simetría es $x = -1$, abre hacia arriba y A(0,0) y B(0,0), el punto de intersección con el eje "y" es 0.

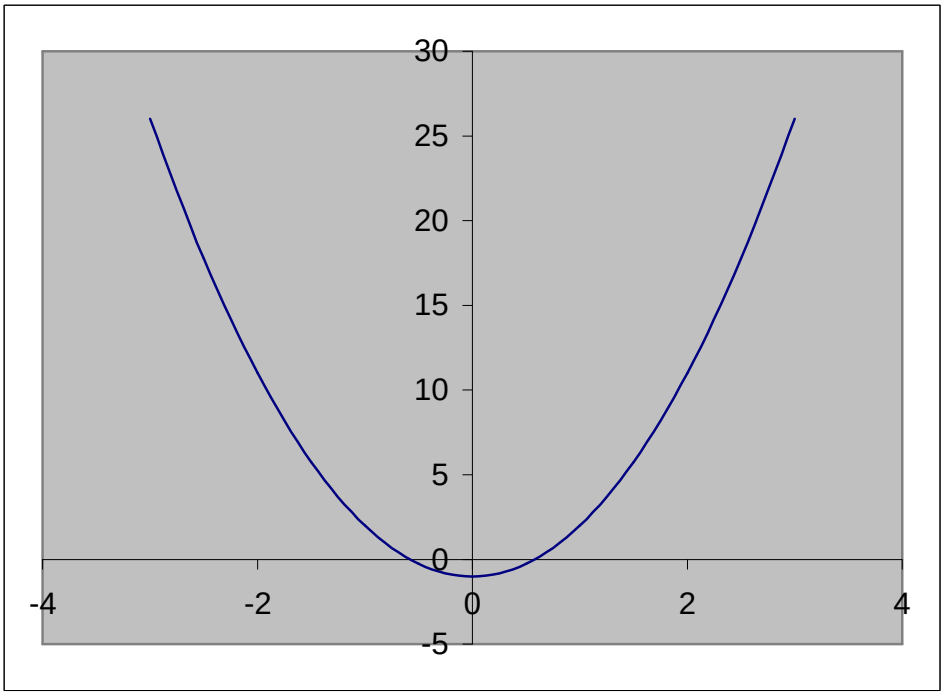
Su gráfica es:



4) $f(x) = 3x^2 - 1$

Esta función se puede expresar como: $f(x) = 3(x-0)^2 - 1$, donde $A = 3 > 0$, $h = 0$ y $k = -1$, por lo que el vértice es $V(0,-1)$, eje de simetría $x = 0$, abre hacia arriba, dos puntos de la parábola son: A(1,2) y B(-1,2); la intersección con el eje " y " está en -1

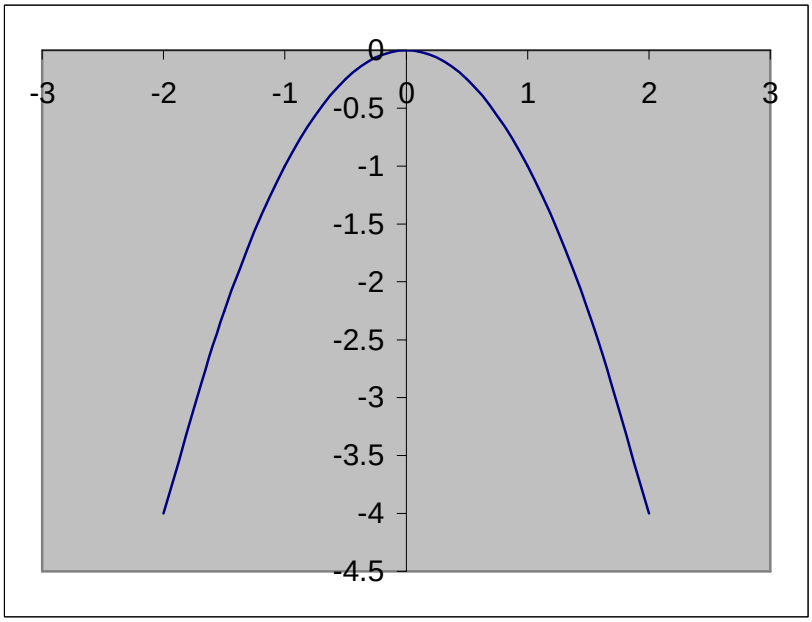
Por lo que su gráfica es:



5) $f(x) = -x^2$

Se puede expresar como $f(x) = -(x-0)^2 + 0$ que es de la forma $f(x) = A(x-h)^2 + k$. Donde $A = -1 < 0,\quad h = 0,\quad k = 0$, por lo que su $V(0,0)$, su eje de simetría es $x = 0$, abre hacia abajo y dos puntos son: A(1,-1) y B(-1,-1), su intersección con el eje " y " es 0.

Su gráfica es:



EJERCICIO

Grafica las siguientes parábolas.

1) $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 8x + 3$

3) $f(x) = x^2 + 4$

4) $f(x) = 2x^2 - 8x$

5) $f(x) = -x^2 - 6x$

6) $f(x) = -5x^2 + 2$

7) $f(x) = 3x^2 + 1$

8) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

9) $f(x) = 3x^2 + 9x + 1$

10) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x$

Solución:

1) $f(x)=2(x+2)^2-9,\ V(-2,-9),$ abre hacia arriba, $x=-2,\quad A(-1,7)\ \ y\ \ B(-3,-7)$.

2) $f(x)=-\frac{1}{4}(x+16)^2+67,\ V(-16,67),$ abre hacia abajo, $x=-16,\quad A\left(-15,\frac{267}{4}\right)$ $y\ \ B\left(-17,\frac{267}{4}\right)$.

3) $f(x)=(x-0)^2+4,\ V(0,4),$ abre hacia arriba, $x=0,\quad A(1,5)\ \ y\ \ B(-1,5)$.

4) $f(x)=2(x-2)^2-8,\quad V\ \ (2\ ,-\ 8\ ),$ abre hacia arriba, $x=2,\quad A(1,-6)$ $y\ B(3,-6)$.

5) $f(x)=-(x+3)^2+9,\ V(-3,9),$ abre hacia abajo y $A(-2,8),\quad B(-4,8)$.

6) $f(x)=-5(x-0)^2+2,\ V(0,2),$ abre hacia abajo y $A(1,-3),\quad B(-1,3)$.

7) $f(x)=3(x-0)^2+1,\ V(0,1),$ abre hacia arriba, $A(1,4),\quad B(-1,4)$.

8) $f(x)=(x-1)^2-4,\ V(1,-4),$ abre hacia arriba, $A(0,-3),\quad B(2,-3)$.

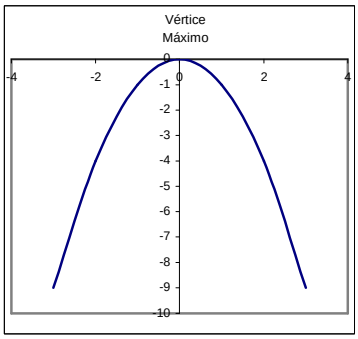
9) $f(x)=3\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{23}{4},\qquad V\left(-\frac{3}{2},-\frac{23}{4}\right),$ abre hacia arriba, $A\left(-\frac{5}{2},-\frac{11}{4}\right)$ $B\left(-\frac{1}{2},-\frac{11}{4}\right)$

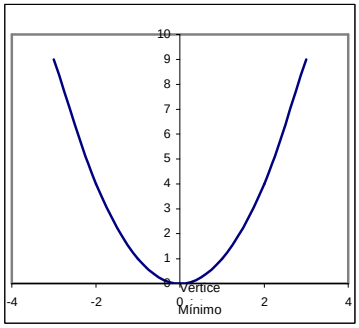
10) $f(x)=\frac{1}{2}(x-6)^2-18,\ V(6,18),\ A\left(5,\frac{35}{2}\right)\ \ B\left(7,\frac{35}{2}\right)$.

1.3 Problemas que involucran funciones cuadráticas

A partir del planteamiento de una función cuadrática como modelo matemático, se pueden resolver problemas determinando el vértice de la parábola. A este tipo de problemas se les conoce como: "PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS"

Observa las siguientes parábolas





EJEMPLOS

1. La ganancia semanal de una empresa se relaciona con el número de artículos producidos cada semana y esto se puede representar por la función:

$$P(x) = -2x^2 + 96x - 52$$

donde $P(x)$ representa la ganancia semanal en pesos y x el número de artículos producidos por semana.

a) Representa gráficamente esta situación.
b) Si la empresa produce 26 artículos en una semana ¿Cuál será su ganancia?
c) Determina cuántos artículos deberá producir la empresa a la semana para que obtenga una ganancia máxima.

Como hasta ahora sólo sabemos graficar una función cuadrática y determinar su vértice, lo primero haremos en este problema, es la gráfica de esta función:

$P(x) = -2x^2 + 96x - 52$

Factorizamos en x

$P(x) = -2(x^2 - 48x) - 52$

Completando cuadrados

$P(x) = -2(x^2 - 48x + 576) - 52 + 1152$

$P(x) = -2(x - 24)^2 + 1100$

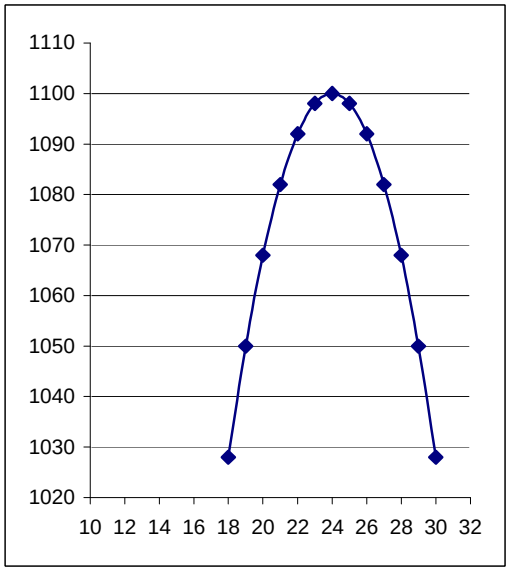
De donde: $V(24,1100)$, eje de simetría $x = 24$, la parábola se abre hacia abajo, y dos puntos de ella son $(25,1098)$, $(23,1098)$, el punto de intersección con el eje "y" es $(0,-52)$

Observa que así como sustituimos $x = 25$ y $x = 23$ en $P(x)$, podemos sustituir cualquier valor de "x" y este nos estaría representando el número de artículos que se producen a la semana y el $P(x)$ corresponde a la sustitución las ganancias, por lo que podemos contestar la pregunta del inciso b) sustituyendo $x = 26$ en $P(x) = -2(x - 24)^2 + 1100$

$$\begin{aligned} P(x) &= -2(26 - 24)^2 + 1100 \\ &= -2(2)^2 + 1100 \\ &= -8 + 1100 \\ &= 1092 \end{aligned}$$

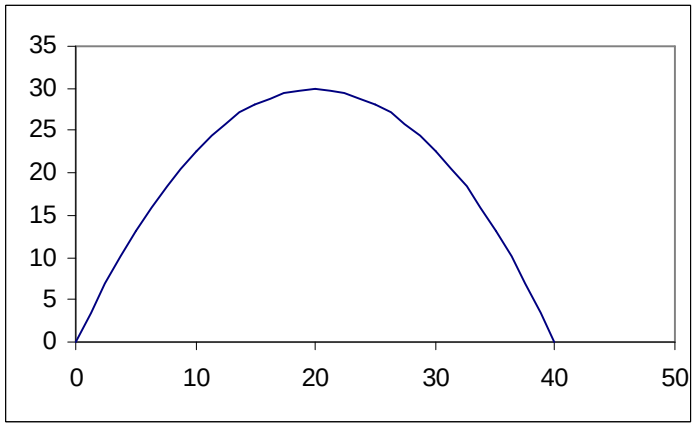
por lo que podemos decir que si la empresa produce 26 artículos, su ganancia será de $1092.

Con está información graficamos y está gráfica representará la situación del problema, lo que contesta el inciso a)



Para contestar el inciso c) en la gráfica podemos observar que el valor máximo de la parábola es el vértice $V(24,1100)$, lo que significa que cuando x toma el valor de 24 artículos, la ganancia máxima es de $1100, cualquier otro valor de x nos dará una ganancia menor a $1100. Entonces la respuesta de c) es 24 artículos.

2. Una rana describe en un salto una trayectoria parabólica, si la longitud de su salto fue de 40 cm y la altura máxima alcanzada de 30 cm. Determina una ecuación para el salto de la rana. La gráfica de su salto puede representarse como sigue



Observa que las coordenadas del vértice representa la máxima altura del salto, por lo que estas coordenadas son $V(20,30)$ entonces en la ecuación de la parábola de forma: $f(x) = A(x-h)^2 + k$ podemos sustituir el valor de h y k por 20 y 30 respectivamente.

$$f(x) = A(x-20)^2 + 30$$

Para encontrar el valor de "A" podemos sustituir los valores de x y $P(x)$ por el punto que tiene coordenadas $(0,0)$ esto lo podemos hacer porque es un punto de la parábola, entonces:

$$0 = A(0-20)^2 + 30$$
$$0 = A(400) + 30$$
$$-30 = A400$$
$$-\frac{30}{400} = A$$

$\therefore \quad A = -\frac{3}{40}$ Entonces la ecuación requerida es: $f(x) = -\frac{3}{40}(x-20)^2 + 30$

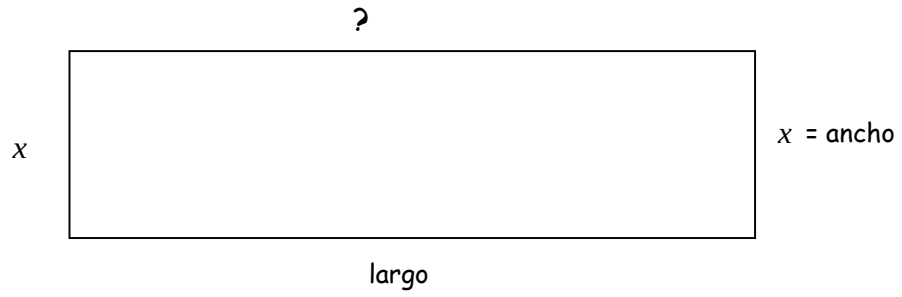
La cual se puede expresar como: $f(x) = -\frac{3}{40}x^2 + 3x$

3. Se desea cercar un espacio rectangular de jardín con 200 m de alambre. ¿Cuáles serán las dimensiones del espacio rectangular para cercar el máximo espacio del jardín?

Para resolver este problema, lo primero que debemos determinar es la función que lo representa. Esta función es de la forma: $f(x) = A(x-h)^2 + k$ donde x representará el ancho del rectángulo. Para determinar esta función recordemos cómo calcular el perímetro y el área de un rectángulo.

Área = (largo)(ancho)
Perímetro = 2(largo)+2(ancho)

Como solo tenemos 200 m para cercar este terreno y si llamamos x al ancho, entonces el Perímetro de este rectángulo debería medir 200 m y el largo lo podemos determinar como sigue:



200 = 2(largo) + 2 x

Si despejamos largo tenemos:

$$l\arg o = \frac{200-2x}{2}$$

$$\therefore \quad l\arg o = 100 - x$$

Si sustituimos el largo $(100-x)$ y el ancho (x) en la fórmula para calcular el área de un rectángulo tenemos:

$$A = x(100-x)$$

Simplificando:

$$A = 100x - x^2$$

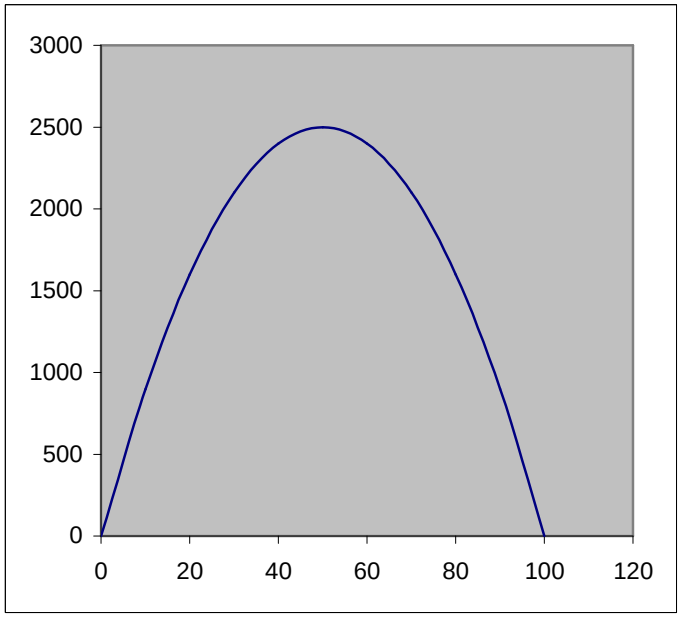
Por lo que la función cuadrática que representa este problema es:

$$f(x) = -x^2 + 100x$$

la cual se puede expresar como:

$$f(x) = -(x-50)^2 + 2500$$

La gráfica de esta función es:



Lo que indica que el máximo de esta parábola se alcanza para $x = 50$, como x representa el ancho del rectángulo, entonces el ancho debe ser 50 m y el largo 50 m, estas dimensiones nos darán el espacio rectangular máximo.

EJERCICIO

Resuelve los siguientes problemas.

1. Se arroja una piedra verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo, la fórmula $S = 32t - 8t^2$ nos da la altura en metros de la piedra después de t segundos.

a) Grafica la trayectoria de la piedra.

b) Determina en cuantos segundos, la piedra alcanza su máxima altura.

c) ¿Qué altura alcanza la piedra a los 3 segundos?

2. Se dispone de 60 m de alambre para cercar un jardín en forma rectangular, pero uno de los lados corresponderá a la pared de la casa. ¿Qué dimensiones del jardín nos darán el área máxima?

3. Determina la ecuación que representa la trayectoria del salto parabólico, de un atleta que alcanza una altura máxima de 2 m y una longitud de 3.40 m.

2.- CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS BÁSICAS

Objetivo: A través de construcciones sencillas se pretende que el alumno explore las propiedades de las figuras elementales, que reconozca patrones de comportamiento geométrico que le permitan plantear conjeturas que pueda justificar y con éstas resolver problemas.

2.1 Construcciones con regla y compás

1. Define los siguientes ángulos:
   a) Complementarios.
   b) Suplementarios.
   c) Perigonales.

2. Siguiendo el procedimiento de la solución para el inciso a, encuentra el ángulo que cumpla con la restricción de cada inciso:
   a) 20° mayor que el triple de su complemento.
   b) 16° menor que la mitad de su suplemento.
   c) 8° mayor que el cuádruplo de su conjugado.

Solución del inciso a)
Buscamos dos ángulos que:
   i) sean complementarios
   ii) uno que sea 20° mayor que el tripe del otro.

La condición i) se puede simbolizar como:

$$\angle a + \angle b = 90^0 \quad \text{----------} \quad (1)$$

la condición ii) nos indica que uno de ellos, por ejemplo el $\angle a$ es 20° mayor que el triple del otro, o sea el $\angle b$, esto se simboliza como:

$$\angle a = 20° + 3(\angle b)$$

y si este valor del $\angle a$ lo sustituimos en la ecuación (1) tenemos:

$$20° + 3(\angle b) + \angle b = 90°$$

que es una ecuación de primer grado con una incógnita y que al resolverla obtenemos:

$$20° + 4(\angle b) = 90°$$
$$4(\angle b) = 90° - 20°$$
$$4(\angle b) = 70°$$

$$\angle b = \frac{70°}{4}$$

$$\angle b = 17.5° = 17°30'$$

Por lo que $17°30'$ es uno de los ángulos pedidos, para encontrar el otro basta con sustituir, el valor encontrado, en la ecuación (1)

$$\angle a + 17°30' = 90°$$

$$\angle a = 90° - 17°30'$$

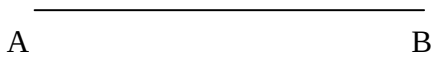
$$\angle a = 72°30'$$

3. Define:
   a) segmentos congruentes.
   b) ángulos congruentes.

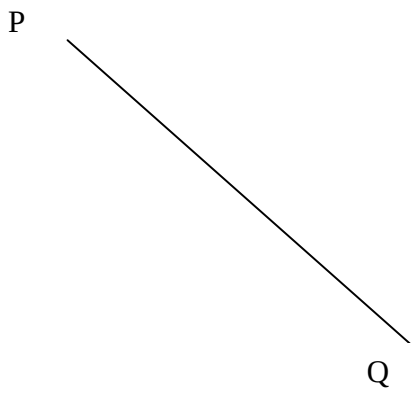
4. Indaga el concepto de:
   a) Bisectriz de un ángulo.
   b) Mediatriz de un segmento.

5. Traza la mediatriz de los siguientes segmentos.

a)

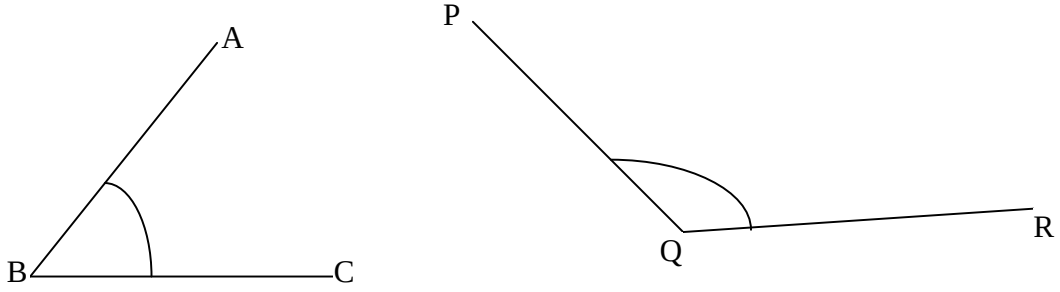


b)



6. Traza un segmento congruente al segmento $\overline{PQ}$ del ejercicio anterior.

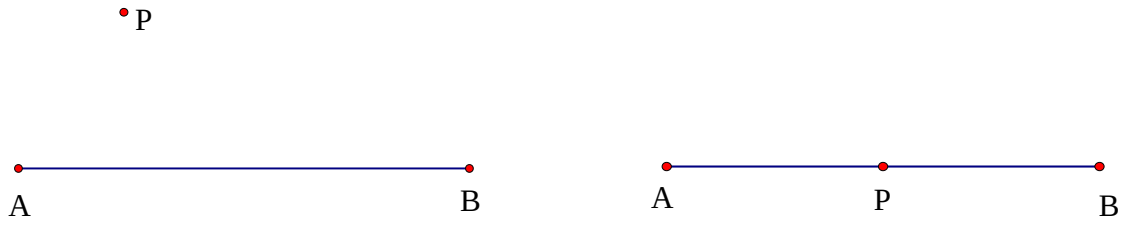
7. Construye la bisectriz del $\angle ABC$ y del $\angle PQR$.



8. Traza un ángulo congruente al ángulo ABC del ejercicio anterior.

9. Usando regla y compás, traza una perpendicular al segmento AB que pase por el punto P, en cada inciso.

a) b)



2.2 Construcción de triángulos

1. Los triángulos se pueden clasificar según la medida de sus lados y de sus ángulos.

Según la medida de sus ángulos se clasifican en:

_____

_____

_____

Según la medida de sus lados se clasifican en:

_____

_____

_____

2. Dibuja un triángulo que sea obtusángulo escaleno.

3. Dibuja un triángulo que sea rectángulo equilátero.

4. Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta.

a) Algunos triángulos acutángulos son isósceles. V F

_____

_____

b) Todos los triángulos equiláteros son isósceles. V F

_____

_____

c) Todos los triángulos acutángulos tienen un ángulo obtuso. V F

_____

_____

d) Algunos triángulos rectángulos son equiláteros. V F

_____

_____

e) Algunos triángulos obtusángulos son equiláteros. V F

_____

_____

5. Analiza y reflexiona las siguientes preguntas.

A) ¿Existen triángulos que sean al mismo tiempo equiláteros y rectángulos?___

¿Por qué?_____

B) ¿Existen triángulos que sean rectángulos e isósceles a la vez? _____

¿Por qué? _____

C) ¿Todo triángulo rectángulo es isósceles? _____

¿Por qué? _____

D) ¿Algunos triángulos obtusángulos son escálenos? _____

¿Por qué? _____

E) ¿Todos los triángulos equiláteros son isósceles? _____

¿Por qué? _____

F) ¿Todos los triángulos isósceles son acutángulos? _____

¿Por qué? _____

6. Los tres principales implementos de trabajo en una cocina son el refrigerador, la estufa y el lavadero que se pueden representar como los puntos de un triángulo. Según una regla de arquitectura, "los tres lados del triángulo de la cocina deben sumar más de 12 pies y menos de 22 pies". Además, el lado más corto del triángulo debe estar entre el lavadero y la estufa.

Sí la distancia entre la estufa y el lavadero es de 10 pies, entre la estufa y el refrigerador 11 pies y entre el refrigerador y el lavadero 11 pies.

a) ¿Es posible formar un triángulo?

¿Por qué? _____

_____

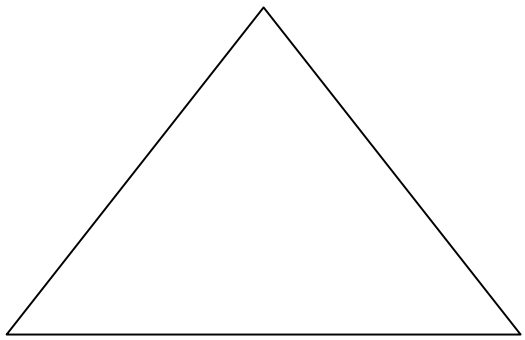
b) ¿El triángulo cumple con la regla establecida?

¿Por qué?_____

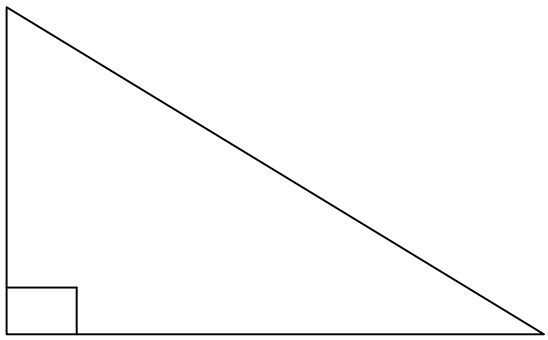
_____

7. En los siguientes triángulos construye lo que se indica.

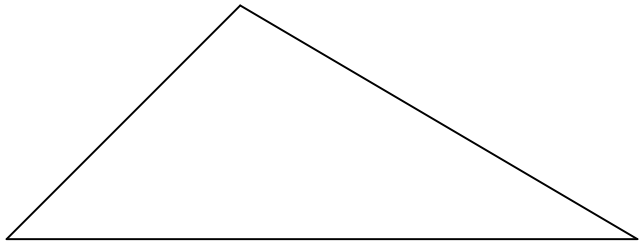
a) El baricentro.



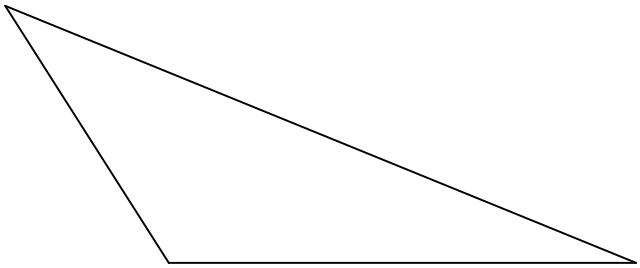
b) El incentro.



c) El circuncentro.

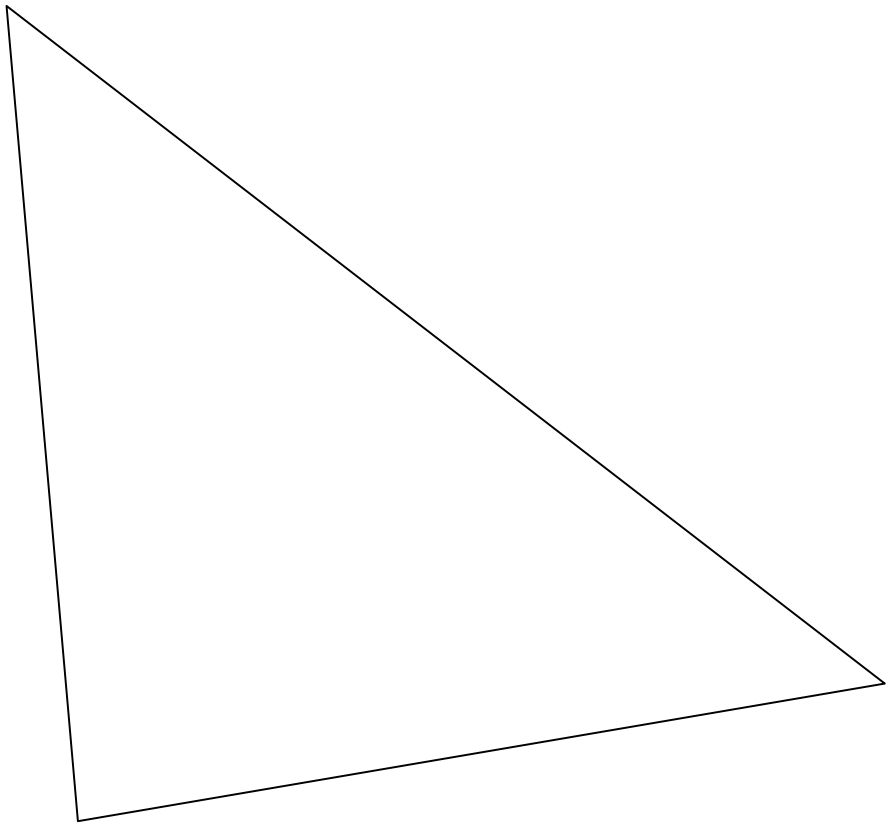


d) El ortocentro.



8. En el siguiente triángulo dibuja.

- Con color azul las medianas.
- Con color anaranjado las mediatrices.
- Con color verde las bisectrices.
- Con color café los alturas.



- Une el baricentro, el circuncentro, el incentro y el ortocentro.

¿ Qué observas? _____

a esta recta se le llama "Recta de Euler".

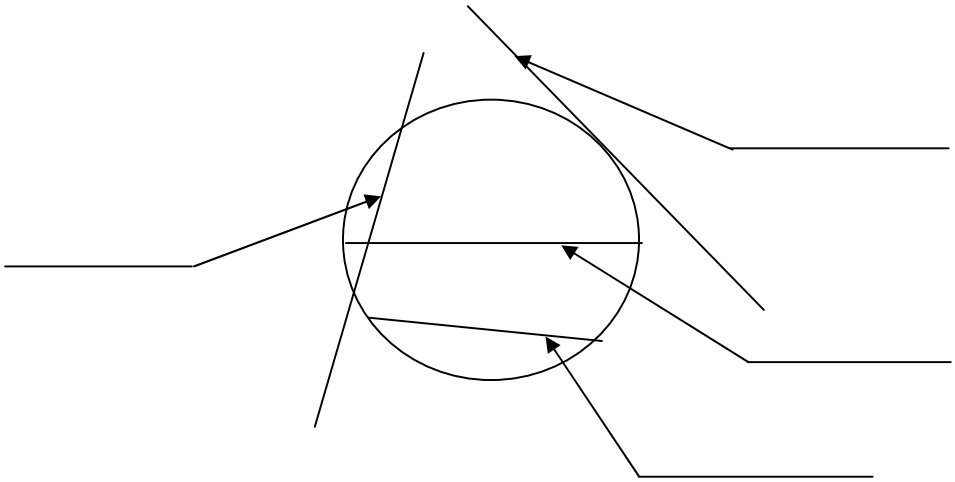
9. Define los siguientes conceptos:
   a) Polígono
   b) Diagonal de un polígono

10. Construye los siguientes polígonos:
   a) Cuadrilátero
   b) Pentágono
   c) Hexágono

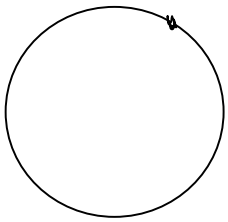
11. En los polígonos que trazaste, del ejercicio anterior, nombra los vértices con A, B, C, … y traza todas las diagonales que se pueden trazar desde el vértice A. ¿Cuántos triángulos se forman en cada polígono?

2.3 Circunferencia

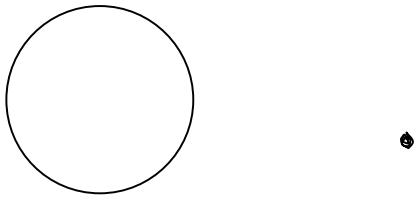
1. En la siguiente figura indica el nombre de cada una de las rectas y segmentos señalados.



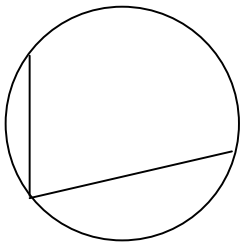
2. Construye la recta tangente a la circunferencia en el punto señalado.



3. Construye las rectas tangentes a la circunferencia desde el punto señalado.



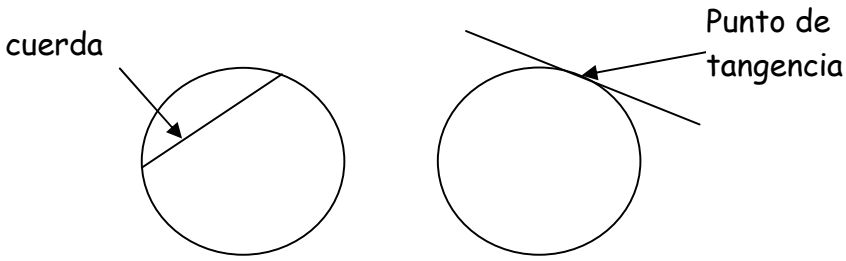
4. Trazando las mediatrices de las cuerdas que se señalan, localiza el centro de la circunferencia.



Resultados importantes:

- ✓ La perpendicular en el punto medio de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia.
- ✓ La perpendicular en el punto de tangencia pasa por el centro de la circunferencia.

5. Dibuja los resultados anteriores en las siguientes circunferencias.



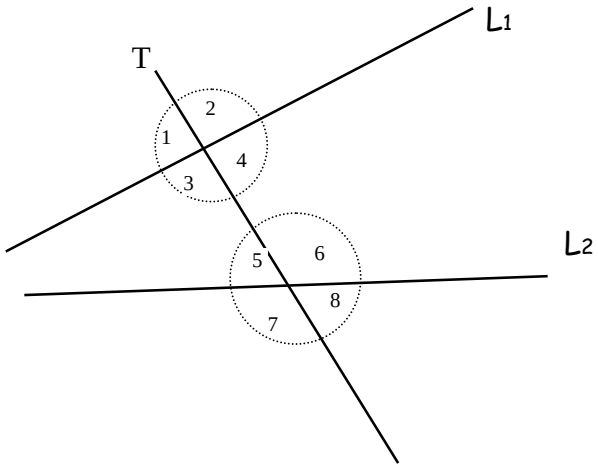
3.- CONGRUENCIA Y SEMEJANZA

Objetivo: Ilustrar el papel de la demostración en los resultados de la Geometría, e iniciar al alumno en el método deductivo. Trabajar la Congruencia y semejanza de triángulos, así como el teorema de Pitágoras.

3.1 Congruencia

3.1.1 Rectas paralelas cortadas por una secante

1. Colorea en 2 tonos de café los ángulos no adyacentes (uno está dentro de las rectas y otro fuera y a uno y otro lado de la transversal) que corresponden a las parejas 1 y 6, 2 y 5, 3 y 8, 4 y 7.

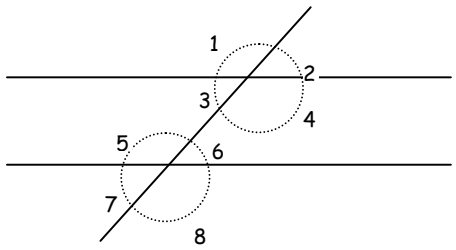


¿Cómo se llaman estos ángulos?

_____

_____

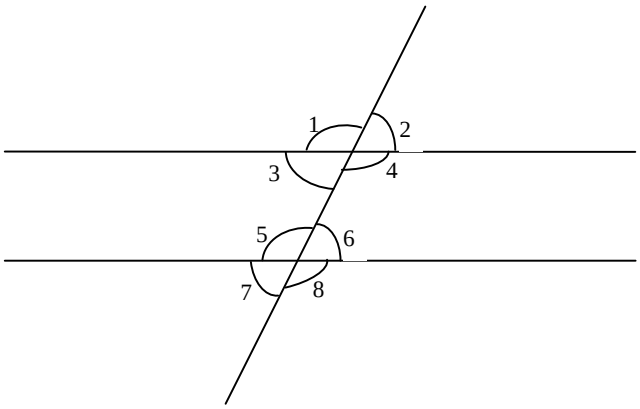
Ahora coloréalos en rectas paralelas cortadas por una transversal.



¿Qué propiedad tienen estos ángulos?

_____

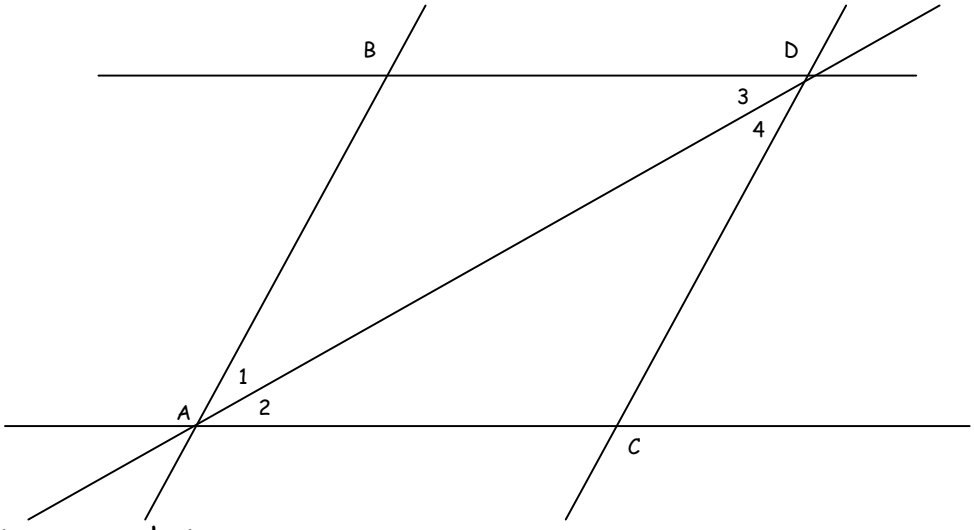
2. En las siguientes rectas paralelas cortadas por una transversal se forman 8 ángulos



Indica qué nombre se les da a las siguientes parejas de ángulos y qué propiedad tienen (congruentes o suplementarios).

	Nombre	Propiedad
1 y 4	opuestos por el vértice	congruentes_____
5 y 3	_____	_____
3 y 6	_____	_____
5 y 8	_____	_____
1 y 8	_____	_____
6 y 7	_____	_____

3. En el cuadrilátero ABCD, ¿qué ángulos tienen que ser congruentes para que AC // BD?



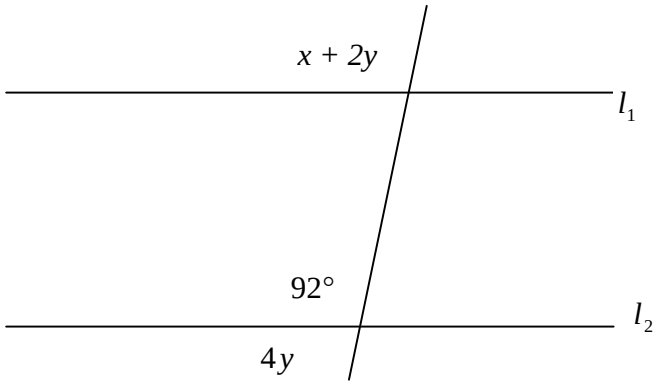
Ángulos congruentes:

_____

4. Resuelve los siguientes problemas suponiendo que las rectas l_1 y l_2 son paralelas, guíate por el ejemplo resuelto.

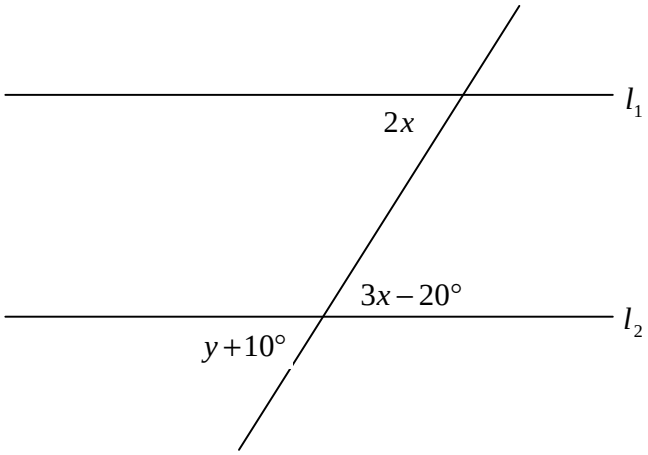
a) Determina el valor de x, y

Justificación



b) Determina el valor de x, y.

Justificación



$2x = 3x - 20°$ ángulos alternos internos son iguales

$2x - 3x = -20°$

$-x = -20°$

$x = 20°$

$2x = y + 10°$ ángulos correspondientes son iguales

$2(20°) = y + 10°$

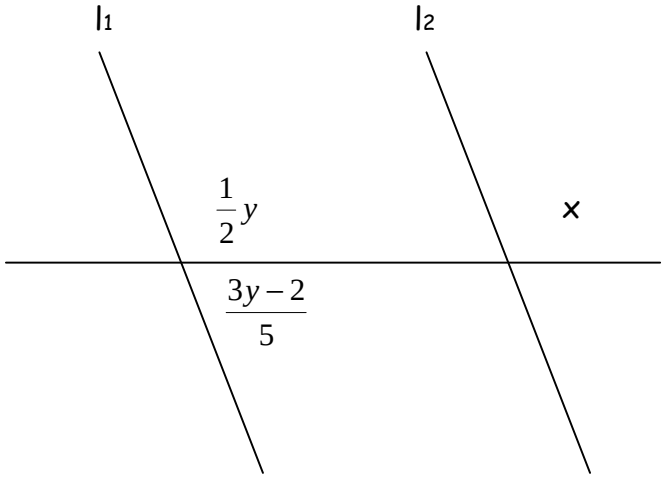
$40° = y + 10°$

$40° - 10° = y$

$y = 30°$

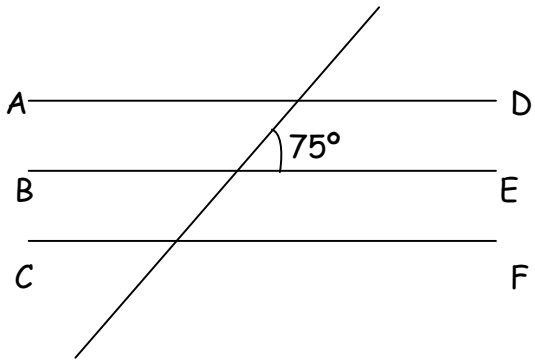
c) Calcula el valor de x, y

Justificación



d) Determina el valor de todos los ángulos suponiendo que las 3 rectas son paralelas.

Justificación



3.1.2 Ángulos interiores y exteriores de un triángulo

En todo triángulo la suma de sus ángulos interiores es igual a 180°.

Con este resultado, resuelve los siguientes problemas como en el ejemplo.

1. Si en un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos mide 22°, ¿cuánto mide el tercero?

2. Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es de 37° 20´. ¿Cuánto mide el otro ángulo agudo?

3. Los tres ángulos interiores de un triángulo son A, B y C. Calcula el valor del ángulo C correspondiente a cada uno de los siguientes valores de A y B y clasifícalos según sus medidas:

a) A = 50° B = 60° C = _____ Triángulo _____

b) A = 42° 50′ B = 75° 17′ C = 61°53′ Triángulo acutángulo

Justificación

$$\begin{array}{r} 42°50' \\ +\underline{75°17'} \\ 117°67' \end{array}$$

$$117°67' = 118°7'$$

$$\text{Re}\,cuerda\ que\ 1° = 60'$$

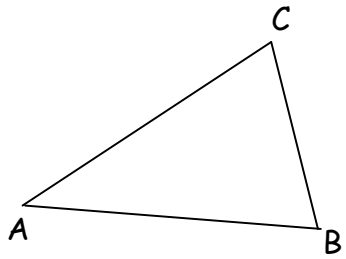
$$180° = 179°60'$$

$$\begin{array}{r} 179°60' \\ -\underline{118°\ 7'} \\ 61°53' \end{array}$$

c) A = 25° 42′ B = 100° 45′ C = _____ Triángulo _____

d) A = 20° B = 69° C = _____ Triángulo _____

4. En un triángulo, uno de sus ángulos es el doble de otro y el tercero es la mitad de la suma de los otros dos. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos?



Justificación

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ – *La suma de los tres ángulos es* $180°$

$\angle A = 2\angle B$ – *Uno de sus ángulos es el doble del otro*

$\angle C = \dfrac{\angle A + \angle B}{2}$ – *El tercer ángulo es la mitad de la suma de los otros dos.*

$$\therefore\ \angle C = \frac{2\angle B + \angle B}{2}$$

$2\angle B + \angle B + \dfrac{2\angle B + \angle B}{2} = 180°$ *sustituyendo en la primera ecuación*

$4\angle B + 2\angle B + 2\angle B + \angle B = 360°$ *multiplicando por* 2 *toda la ecuación*

$$9\angle B = 360°$$

$$\angle B = \frac{360°}{9}$$

$$\angle B = 40°$$

entonces : $\angle A = 2\angle B = 2(40°) = 80°$

$\angle B = 40°$

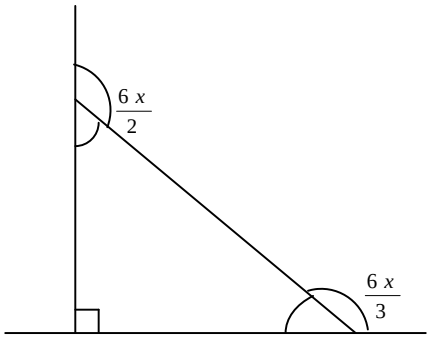
$$\angle C = \frac{\angle A + \angle B}{2} = \frac{80° + 40°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

5. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos es el doble del otro. ¿Cuánto mide cada uno?

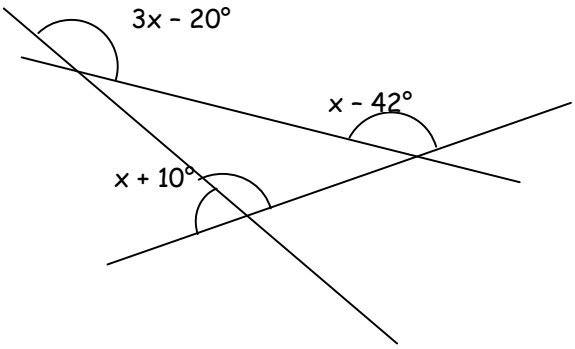
> En todo triángulo:
> - La suma de los ángulos exteriores es igual a 360°.
> - Un ángulo interior y el exterior adyacente a él son suplementarios (suman 180°).
> - Un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.

Con estos resultados resuelve los siguientes problemas como en el ejemplo.

6. Con los datos que se proporcionan en la figura calcula el valor de *x.*



Justificación



Justificación

$3x - 20° + x - 42° + x + 10° = 360°$

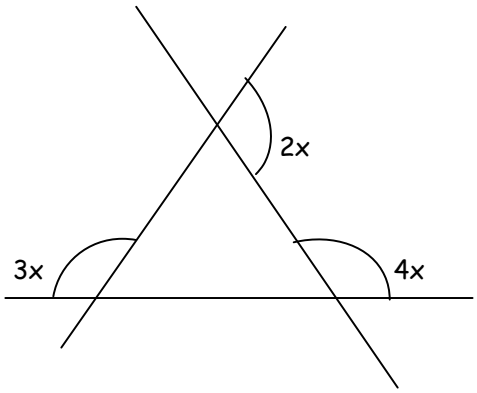
la suma de los ángulos exteriores es de $360°$

$$5x - 52° = 360°$$
$$5x = 360° + 52°$$
$$5x = 412°$$
$$x = \frac{412°}{5}$$
$$x = 82.4°$$

$\therefore\ 3x - 20° = 3(82.4°) - 20° = 227.2°$

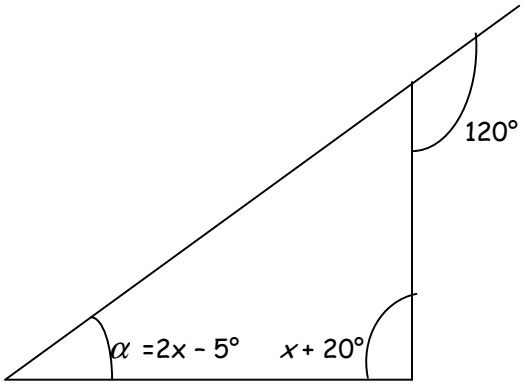
$x - 42° = 82.4° - 42° = 40.4°$

$x + 10° = 82.4° + 10° = 92.4°$



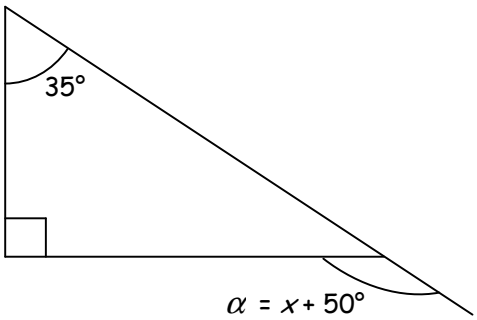
Justificación

7. Con los datos que se proporcionan calcula el valor de α.

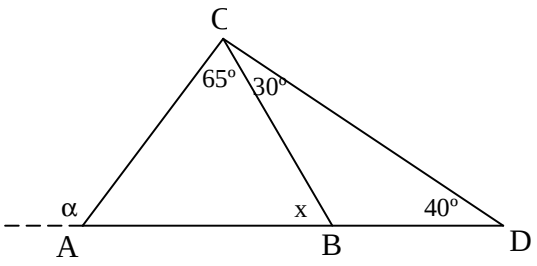


Justificación

Justificación



Justificación



8. Menciona 5 usos de polígonos regulares en objetos del mundo real. Para cada uno de ellos piensa en las consecuencias que habría si no fueran polígonos regulares.

_____
_____
_____
_____
_____

9. Encuentra usos de polígonos regulares en 2 materias que estés cursando.

_____
_____

10. Obtén la suma de los ángulos interiores de los siguientes polígonos.

a) Hexágono

Suma: _____

b) Decágono

Suma: _____

c) Dodecágono

Suma: _____

11. Halla el valor de un ángulo interior y de un ángulo exterior de los polígonos del ejercicio anterior, suponiendo que son polígonos regulares.

Ángulo interior: _____

Ángulo exterior: _____

12. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular en el cual cada ángulo interior mide 108°?

Número de lados: _____

13. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular en el que cada ángulo interior mide 140°?

Número de lados: _____

14. La suma de los ángulos interiores de un polígono de "n" lados es de 3240°. Si el polígono es regular

a) ¿cuantos lados tiene? _____

b) ¿Cuál es el valor de cada uno de los ángulos interiores y cuál el de los exteriores?

Interiores: _____

Exteriores: _____

15. Los ángulos interiores de un hexágono irregular miden x, $\frac{5}{2}x, \frac{7}{2}$ x, $2x$, $2x$, x. Calcula la medida de cada uno de ellos y sus correspondientes ángulos exteriores.

Ángulos interiores: _____ _____ _____
_____ _____ _____

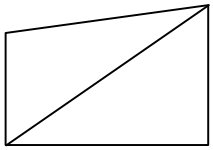
Ángulos exteriores: _____ _____ _____
_____ _____ _____

16. Muestra, como en el ejemplo, que:

a) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°.

b) La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es de 360°.

Un cuadrilátero se puede dividir en dos triángulos como se muestra en la figura, como en cada triángulo la suma de los ángulos interiores es de 180° entonces en dos triángulos (cuadrilátero) es de 360°.



c) La suma de los ángulos exteriores de un pentágono es de 360°.

d) La suma de los ángulos interiores de un hexágono es de 720°.

e) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual al ángulo exterior no adyacente.

3.2 Congruencia de triángulos

1. Una alfombra tiene un hoyo en forma triangular y para repararla se tendrá que cortar un retazo de alfombra triangular igual al tamaño del hoyo. ¿Qué medidas serán suficientes tomar del hoyo para cortar el retazo de alfombra?

_____

_____

_____

2. Establece la definición de congruencia entre dos triángulos.

_____

_____

_____

3. Explica con tus propias palabras lo que significan los criterios de congruencia LAL, ALA y LLL.

LAL

_____

_____

ALA

_____

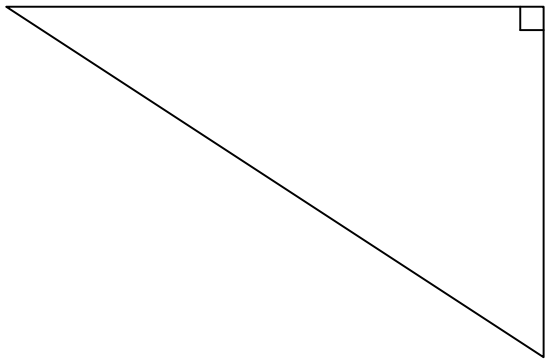
_____

LLL

_____

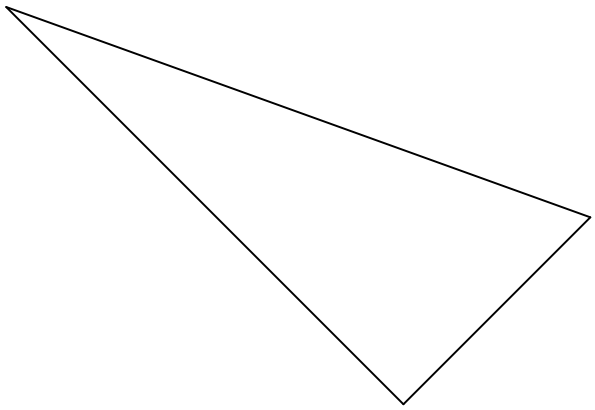
_____

4. Construye un triángulo congruente al siguiente, explicando la forma en que lo construiste.



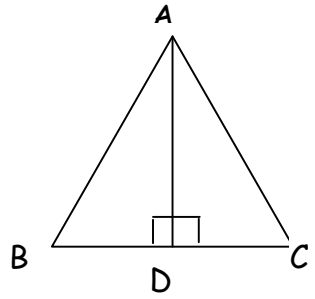
5. Construye por dos métodos distintos 2 triángulos congruentes al triángulo anterior. Explica tus métodos de construcción.

6. Con el criterio de congruencia LLL, construye un triángulo congruente al siguiente.



7. En los siguientes ejercicios analiza la situación e indica cuál de los tres criterios (LLL, ALA y LAL) se puede utilizar para demostrar que los triángulos son congruentes, como en el ejemplo.

a) En la figura AD biseca a $\overline{BC}$.



$\overline{AB} \cong \overline{AC}$

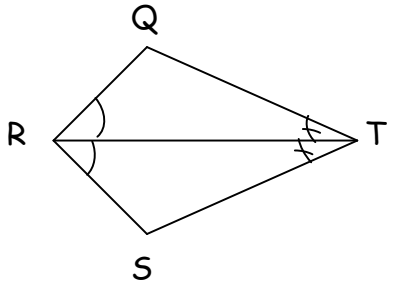
Justifica que $\Delta\ ABD \cong \Delta\ ACD$

Justificación:
Con los datos que se proporcionan tenemos que:

- ✓ $\overline{AD}$ divide en 2 partes iguales (biseca) al segmento $\overline{BC}$, por lo que $\overline{BD} = \overline{DC}$
- ✓ $\overline{AB}$ es congruente a $\overline{AC}$ por lo que $\overline{AB} = \overline{AC}$
- ✓ $\overline{AD}$ es lado común de los dos triángulos que se forman, por lo que $\overline{AD} = \overline{AD}$

Por lo anterior, el criterio mediante el cual se puede justificar que $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$ es el LLL

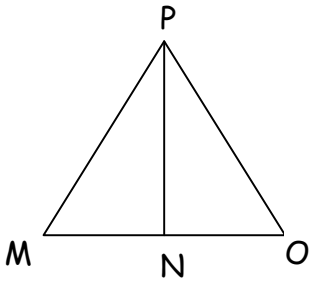
b) En la figura RT biseca al < QRS



RT biseca al < QTS

Justifica que $\Delta\ RTQ \cong \Delta\ RTS$

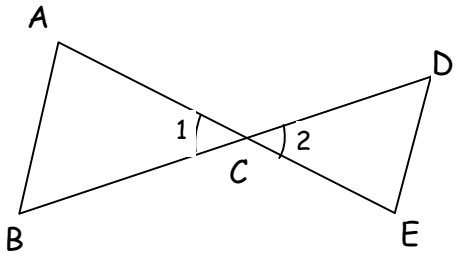
c) En la figura NP $\perp$ MO



NP biseca < MPO
y, por lo tanto, ΔMPO es isósceles

Justifica que $\Delta\ MNP \cong \Delta\ ONP$

d) En la figura AE y BD se bisecan.

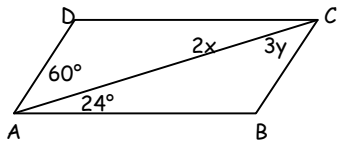


$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$

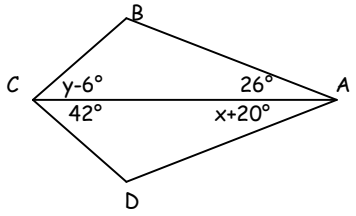
Justifica que $\Delta\ ABC \cong \Delta\ EDC$

8. En cada una de las siguientes figuras los triángulos son congruentes. Halla el valor de x, y, como en el ejemplo.

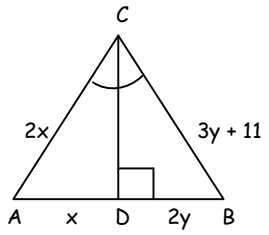
a) **Justificación**



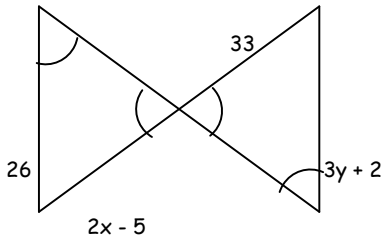
b) **Justificación**



c) **Justificación**

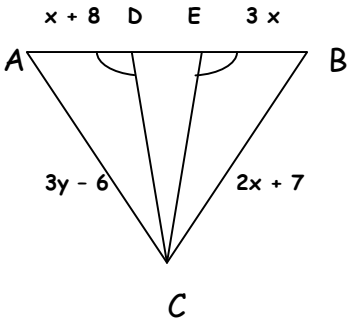


d) **Justificación**



e) Ejemplo

Justificación



$$\begin{cases} x + 8 = 3x & \text{ec. 1} \\ 3y - 6 = 2x + 7 & \text{ec. 2} \end{cases}$$

lados iguales

De la ecuación 1 se tiene que:

$3x - x = 8$, de donde $\boxed{x = 4}$

Sustituyendo este valor en la ecuación 2 encontramos el valor de y.

$3y - 6 = 2(4) + 7$

$3y = 15 + 6$

$y = \frac{21}{3}$

$\boxed{y = 7}$

3.3 SEMEJANZA Y TEOREMA DE PITÁGORAS

3.3.1 Semejanza de triángulos

1. Establece la definición de semejanza entre 2 triángulos.

   _____

   _____

2. Explica la diferencia entre semejanza y congruencia de triángulos.

   _____

   _____

3. Explica con tus propias palabras qué significan los criterios de semejanza LLL, LAL y AA, entre triángulos.

   LLL:

   _____

   _____

   LAL:

   _____

   _____

   AA:

   _____

   _____

4. Indaga el significado de:

   a. Lados homólogos:_____

   b. Razón: _____

   c. Proporción:_____

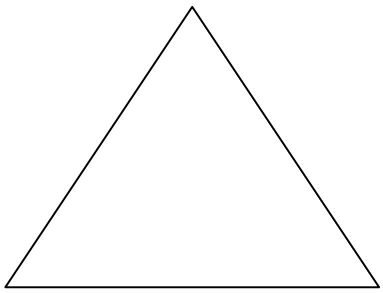
Ejemplifica estos conceptos.

_____

_____

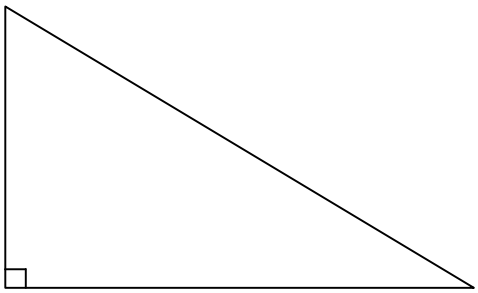
_____

5. Construye un triángulo semejante al triángulo dado con factor de escala de $\frac{1}{2}$.

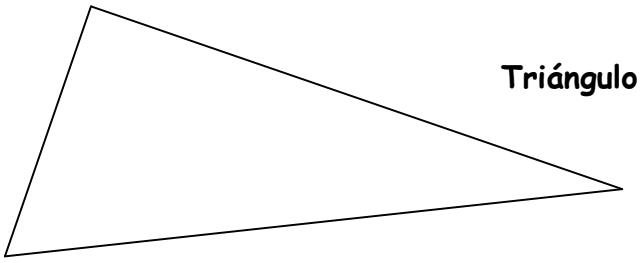


Triángulo semejante

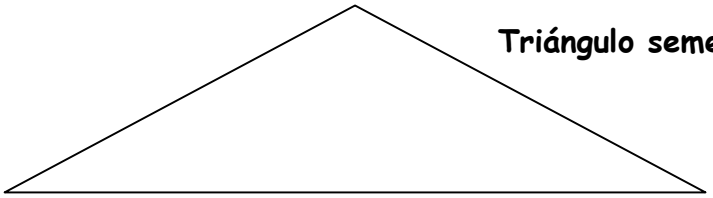
6. Con el criterio de semejanza que se indica, construye un triángulo semejante al triángulo dado. Indica cuál es el factor de escala utilizado en cada caso.



Triángulo semejante por LLL

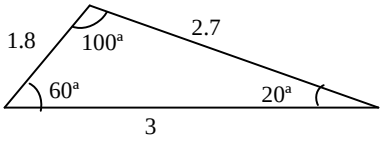


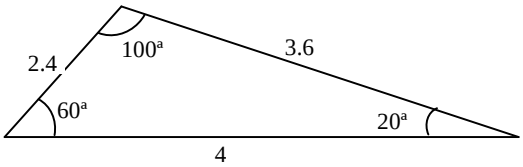
Triángulo semejante por LAL



Triángulo semejante por AA

7. Indica si los siguientes triángulos son semejantes.

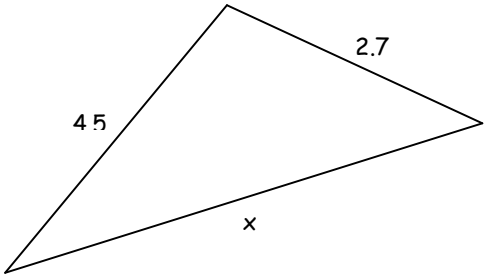


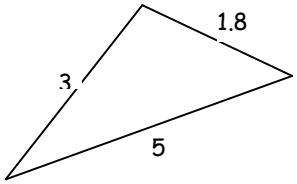


Justifica tu respuesta: _____

_____

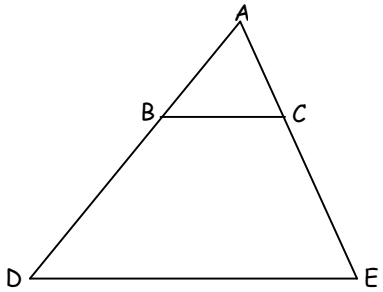
8. Dado que los siguientes triángulos son semejantes encuentra el valor de x.





JUSTIFICACIÓN

9. Muestra que el triángulo ABC es semejante al triángulo ADE si sabemos que BC es paralela a DE.



10. Indica si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a) Dos figuras congruentes son siempre semejantes._____

_____

b) Dos figuras semejantes son siempre congruentes._____

_____

c) Todos los triángulos isósceles son semejantes. _____

_____

d) Todos los triángulos rectángulos son semejantes. _____

_____

e) Existen triángulos equiláteros que no son semejantes. _____

_____

f) Existen figuras equiangulares que no son semejantes. _____

_____

g) Todos los pentágonos son congruentes. _____

_____

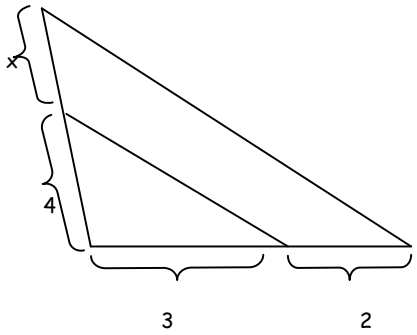
h) Todos los triángulos rectángulos son semejantes. _____

_____

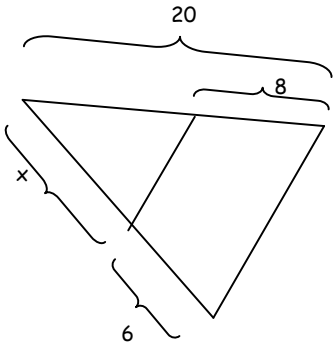
i) Si dos figuras son semejantes, sus ángulos serán iguales. _____
_____

j) ¿Extendiendo la definición de semejanza se podría decir que un niño es semejante a un adulto?, ¿y un niño a un bebé? _____
_____

11. En los siguientes ejercicios determina el valor de x.



Justificación



Justificación

$$\frac{20}{12} = \frac{6+x}{x} \quad \textit{los triángulos son semejantes}$$

$$20x = 12(6+x)$$

$$20x = 72 + 12x$$

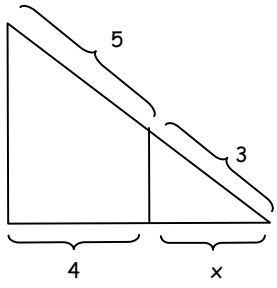
$$20x - 12x = 72$$

$$8x = 72$$

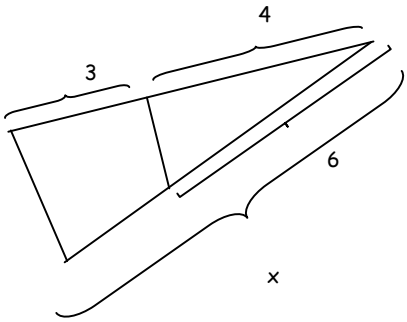
$$x = \frac{72}{8}$$

$$x = 9$$

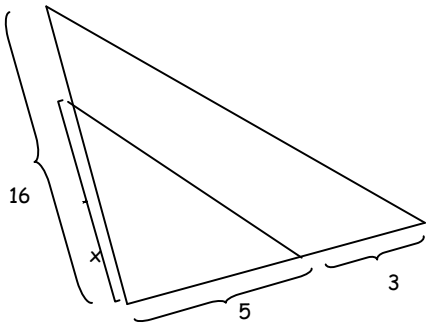
Justificación

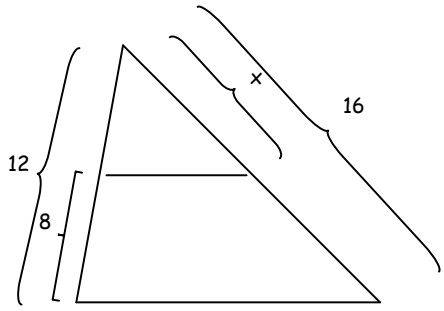


Justificación



Justificación

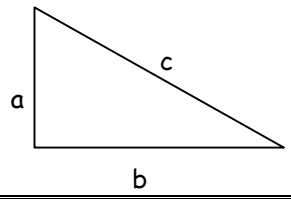




3.3.2 Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras

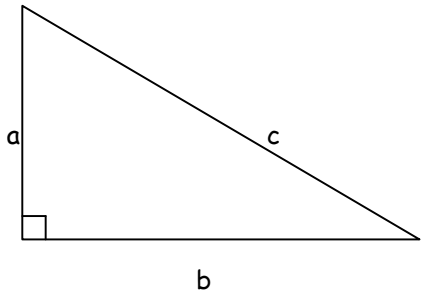
En todo triángulo rectángulo la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, esto es,



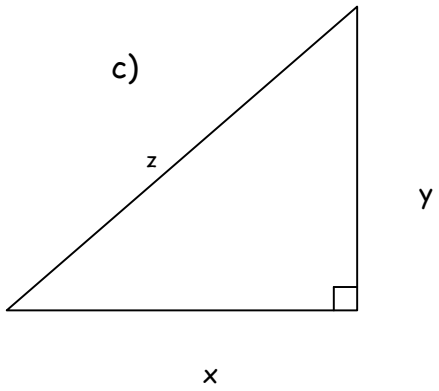
$$a^2 + b^2 = c^2$$

1. Enuncia el Teorema de Pitágoras con los datos de las siguientes figuras:

a)

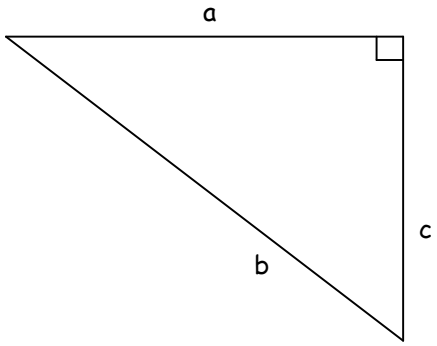


c)



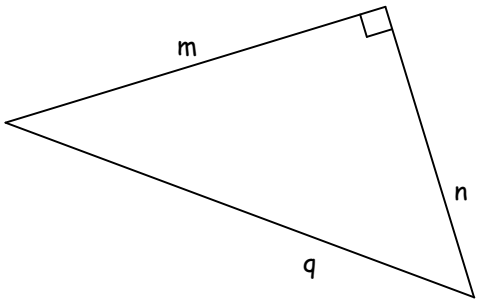
Teorema: _____ Teorema: _____

b)



Teorema: _____

d)



Teorema: _____

2. Contesta cada pregunta, de acuerdo a los datos que se proporcionan, acerca de un triángulo rectángulo, como en el ejemplo.

   a. ¿Cuál es el valor de la hipotenusa si los catetos miden 3 y 4?.

   b. ¿Cuál es el valor de la hipotenusa si los catetos miden 5 y 7?.

   c. ¿Cuánto mide un cateto si la hipotenusa y el otro cateto miden 20 y 12 respectivamente?.

   Solución

   Hipotenusa = 20, cateto = 12. Teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$

   Sustituyendo $12^2 + b^2 = 20^2$

   $b^2 = 20^2 - 12^2$

   $b^2 = 400 - 144$

   $b^2 = 256$

   $\boxed{b = 16}$

   d. ¿Cuánto mide la hipotenusa si los catetos miden $\sqrt{5}$ y 3?.

   e. ¿Cuánto mide un cateto si el otro cateto y la hipotenusa miden $\sqrt{3}$ y $3\sqrt{3}$ respectivamente?.

f. ¿Cuánto mide un cateto si el otro cateto mide $\sqrt{5}$ y la hipotenusa $\sqrt{17}$?.

3. Indica cuáles de las siguientes tercias son medidas de los lados de un triángulo rectángulo y cuáles no. Justifica tus respuestas.

a) 4, 2, 20 **Justificación**

b) 12, 5 y 13 **Justificación**

c) 36, 64, 110 **Justificación**

d) 1, 1, 2 **Justificación**

e) 5, 6, 8 **Justificación**

f) 1, 2, $\sqrt{5}$ **Justificación**

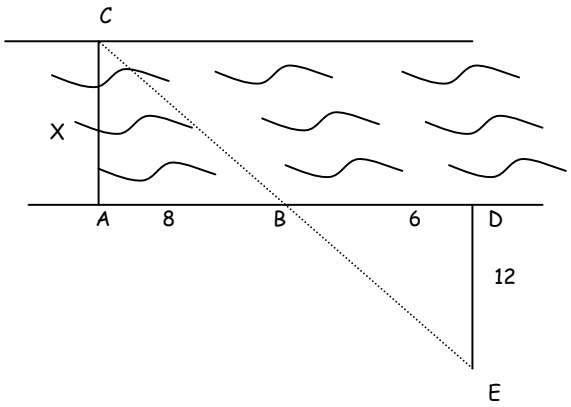
g) 3, 3, $3\sqrt{2}$ **Justificación**

h) 2, 6, $2\sqrt{10}$ **Justificación**

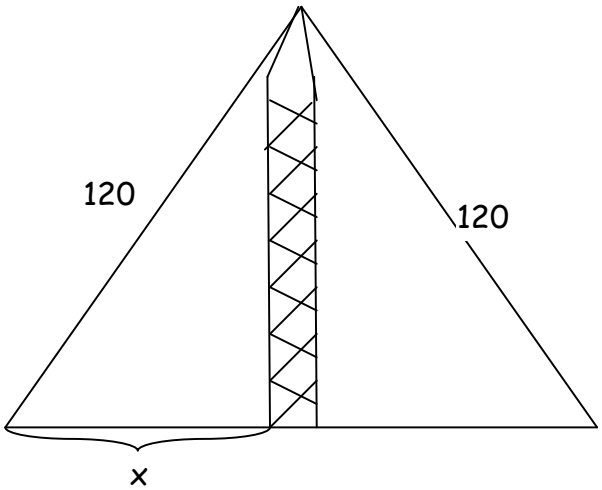
$$\left(2\sqrt{10}\right)^2 = 2^2 + 6^2$$
$$4(10) = 4 + 36$$
$$40 = 40$$
$\therefore$ *es un triángulo rectángulo*

Resuelve los siguientes problemas, como en el ejemplo.

4. Para determinar el ancho AC de un río, un hombre tomó las medidas indicadas en la figura siguiente en metros. El segmento AC es perpendicular a AD y BD es perpendicular a DE, ¿cuáles la anchura del río?



5. Para darle mayor estabilidad a una antena de 72m de altura, en una estación radiofónica se desea colocar tirantes de 120 m. Si se proyecta tender los tirantes desde la parte más alta de la torre ¿A qué distancia del pie de ésta deben construirse las bases de concreto para fijar dichos tirantes?



Justificación

$$x^2 + 72^2 = 120^2$$
$$x^2 = 120^2 - 72^2$$
$$x^2 = 14400 - 5184$$
$$x^2 = 9216$$
$$x = \sqrt{9216}$$
$$x = 96$$

6. Un terreno mide 2 000 m de largo por 1 500 m de ancho, pero se localiza en medio una colina que impide una medición directa ¿cuánto mide la diagonal de este terreno?

7. Un salón mide 3 m de altura, 6 m de ancho y 10 m de largo. Si un insecto debe caminar desde A (una esquina) hasta B (el punto medio del lado CD). ¿Cual es la distancia mínima que deberá caminar el insecto para ir de A a B?

8. Se tiene una pirámide de base cuadrada. Si los triángulos son equiláteros y sus lados miden 2 m. ¿Cuál es la altura de la pirámide?

9. Un edificio de 12 m de altura original se está hundiendo poco a poco. Para evitar que se derrumbe se pretende colocar un pilar de la punta del edificio al suelo, ¿cuál será la altura del pilar si se sabe que la parte hundida del edificio tiene una altura de 1 m y la sombra que proyecta es de 5 m?

4.- PERÍMETROS, ÁREAS Y VOLÚMENES

PROPÓSITOS:

Aplicar conocimientos algebraicos y geométricos adquiridos en unidades anteriores, a la resolución de problemas sobre figuras y cuerpos que involucren exploraciones geométricas, deducciones y cálculos numéricos.

Propiciar el desarrollo de la imaginación espacial.

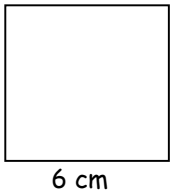
¿QUÉ ES MEDIR?

Es una acción que consiste en comparar una magnitud con otra que sirve de patrón de medida.

4.1 Cálculo de perímetros, áreas y volúmenes

En el caso de la Geometría la medición de longitudes se hace de manera directa en su mayoría. El problema es en la medición de áreas y volúmenes, ya que por su complejidad exige que se hagan medidas indirectas utilizando fórmulas, ejemplo:

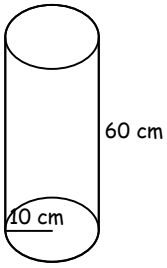
a) Calcula el área y el perímetro de un cuadrado cuyo lado mide 6 cm.



$A = l^2 = (6)^2 = 36\ cm^2$

$P = 4\ l = 4\ (6) = 24\ cm$

b) Calcula el volumen de un cilindro de altura 60 cm y radio de la base igual a 10 cm.



B = área de la base = $\pi\ r^2 = \pi\ (10)^2 = 100\ \pi\ cm^2$

$V = B \times h = (100\ \pi^2) \times 60\ cm$

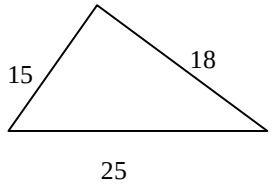
$V = 6000\ \pi\ cm^3 = 6000\ (3.1416)\ cm^3$

$V = 18849.60\ cm^3$

Para resolver esta guía se te pide como primera actividad, investigar las fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos regulares e irregulares.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcula el área y el perímetro del triángulo de la figura:



P = a + b + c

P = 15 + 18 + 25

P = 58

Para calcular el área y cómo no conocemos la altura, utilizamos la fórmula de Heron

A = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

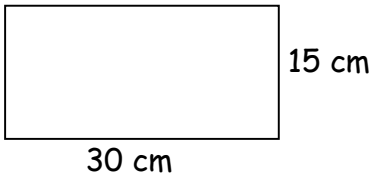
s = $\frac{a + b + c}{2} = \frac{58}{2} = 29$

A = $\sqrt{29(29-15)(29-18)(29-25)}$

A = $\sqrt{29(14)(11)(4)}$

A = $\sqrt{17864}$ = 133.65

2. Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de base 30 cm y altura 15 cm.

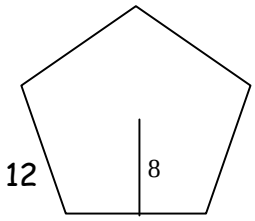


P = 2b + 2a = 2 (30) + 2 (15)

P = 60 + 30 = 90 cm

A = b x h = (30) (15) = 450 cm^2

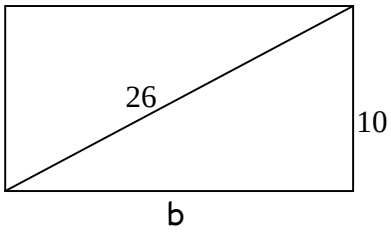
3. Calcula el área y el perímetro de un pentágono de lado 12 y apotema 8.



$P = 5\,l = 5\,(12) = 60$ u

$A = \frac{Pa}{2} = \frac{60\,(8)}{2} = 240\ u^2$

4. Calcula el área de un rectángulo de altura 10 u y diagonal 26 u.



$d^2 = b^2 + h^2$

$(26)^2 = b^2 + (10)^2$

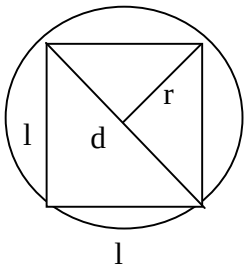
$676 = b^2 + 100$

$b^2 = 686 - 100 = 576$

$b = \sqrt{576} = 24$

$A = b \times h = (24)\,(10) = 240\ u^2$

5. Calcula el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio r = 10 u.



$d = 2r = 2\,(10) = 20$ u

$d^2 = l^2 + l^2$

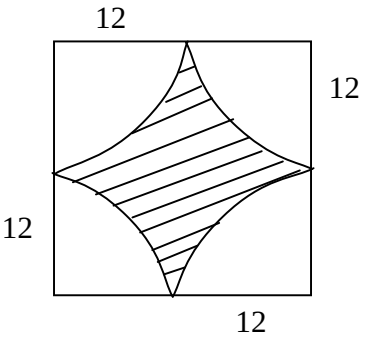
$d^2 = 2\,l^2$

$2\,l^2 = (20)^2 = 400$

$l^2 = \frac{400}{2} = 200$

$A = l^2 = 200\ u^2$

6. Calcula el área de la figura sombreada



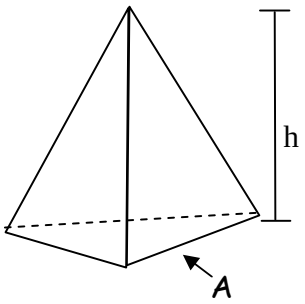
$A_{\square} = l^2 = (24)\ (24) = 576\ u^2$

$A_o = \pi\ r^2 = (3.1416)\ (12)^2 = 452.39\ u^2$

$A = A_{\square} - A_o = 576 - 452.39$

$A = 123.61\ u^2$

7. Calcula el área de la base de una pirámide triangular que tiene un volumen de 600 m^3 si su altura es de 20 m



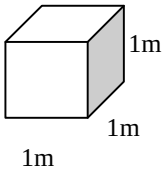
$V = \frac{1}{3}\ A \cdot h$

Despejo A:

$A = \frac{3V}{h} = \frac{3\ (600)}{20} =$

$A = 90\ m^2$

8. Calcula el volumen de un cubo de arista igual a 1 m



$V = l \times l \times l = (1)\ (1)\ (1)$

$V = 1\ m^3$

PROBLEMAS PROPUESTOS

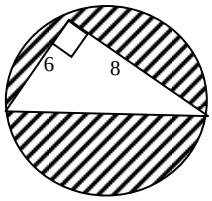
1. Halla la base y la altura de un rectángulo si su área es de 70 u^2 y su perímetro es de 34 u.

2. Encuentra el área de un cuadrado cuyo perímetro es de 30 u.

3. Calcula el área de una banqueta de 1.20 de ancho y que rodea una plaza rectangular de 90 m de largo y 65 de ancho.

4. Cuánto vale el radio de una circunferencia que tiene un área de $A = 36\,\pi$

5. Calcula el área sombreada



6. Si el área de un cuadrado es de 81, calcula:
   a) su lado, b) su perímetro, c) su diagonal.

7. Calcula el volumen de un paralelepípedo de dimensiones 5m, 4m, 2m.

8. Calcula el volumen de una esfera de radio igual a 12 pulgadas.

9. Calcula el volumen de un cilindro de radio igual a 1m y altura igual a 5m.

10. Calcula el volumen de un cono de altura igual a 10cm y el radio de su base mide 4cm.

REPUESTAS

1. a = 10u b = 7u o si no a = 7u b = 10u

2. $A = 56.25u^2$

3. $A = 377.76u^2$

4. r = 6

5. $A = 54.54u^2$

6. l = 9u P = 36u d = 12.73u

7. $V = 40m^3$

8. $V = 7238.24\ pulg^3$

9. $V = 15.708m^3$

10. $V = 167.551cm^3$

5.- ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

PROPÓSITO:

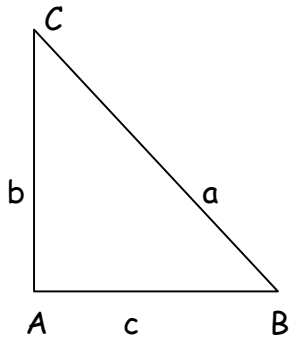
Mostrar a las razones trigonométricas como una herramienta y un modelo en la solución de problemas de diversos campos del conocimiento. Asimismo, se inicia un nuevo saber matemático que culminará en el estudio de las funciones trigonométricas.

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

5.1. Razones Trigonométricas para ángulos agudos

En cada triángulo rectángulo tenemos una mutua dependencia entre sus lados y ángulos. La trigonometría nos enseña la naturaleza exacta de dicha dependencia. Al comparar los lados establecemos razones llamadas funciones trigonométricas.

ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO



catetos: b, c

hipotenusa: a

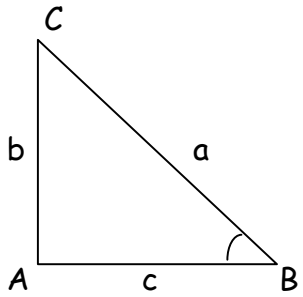
ángulos agudos: B, C

ángulo recto: A

Las razones trigonométricas son:

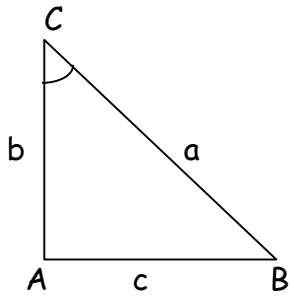
- seno se abrevia sen
- coseno se abrevia cos
- tangente se abrevia tan
- cotangente se abrevia cot
- secante se abrevia sec
- cosecante se abrevia csc

Los catetos dependiendo del ángulo que se trate serán opuesto o adyacente.



b = cateto opuesto al ángulo B

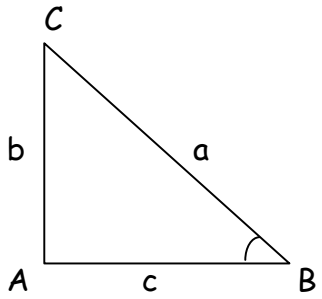
c = cateto adyacente al ángulo B



c = cateto opuesto al ángulo C

b = cateto adyacente al ángulo C

Las razones para cada ángulo agudo serán:



tan B = $\frac{cat\,op}{cat\,ady} = \frac{b}{c}$

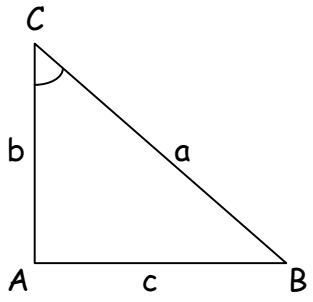
cot B = $\frac{cat\,ady}{cat\,op} = \frac{c}{b}$

sen B = $\frac{cat\,op}{hip} = \frac{b}{a}$

sec B = $\frac{hip}{cat\,ady} = \frac{a}{c}$

cos B = $\frac{cat\ ady}{hip} = \frac{c}{a}$

csc B = $\frac{hip}{cat\,op} = \frac{a}{b}$



tan C = $\frac{cat\,op}{cat\,ady} = \frac{c}{b}$

cot C = $\frac{cat\,ady}{cat\,op} = \frac{b}{c}$

sec C = $\frac{hip}{cat\,ady} = \frac{a}{b}$

csc C = $\frac{hip}{cat\,op} = \frac{a}{c}$

sen C = $\frac{cat\,op}{hip} = \frac{c}{a}$

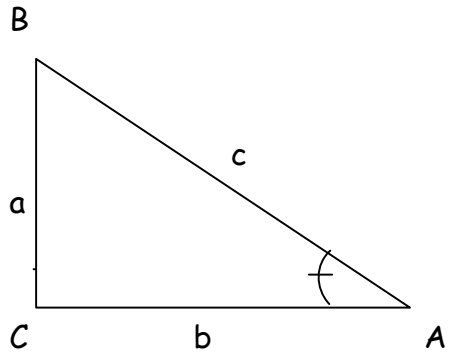
cos C = $\frac{cat\ ady}{hip} = \frac{b}{a}$

Con el uso de las razones se pueden calcular todos los valores de un triángulo rectángulo sólo conociendo 2 datos, (a excepción de conocer los dos ángulos agudos). El otro dato que conocemos es el ángulo de 90°.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) ¿Cómo se definen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente?

2) Encuentra las razones trigonométricas seno, coseno, tangente en el siguiente triángulo rectángulo.



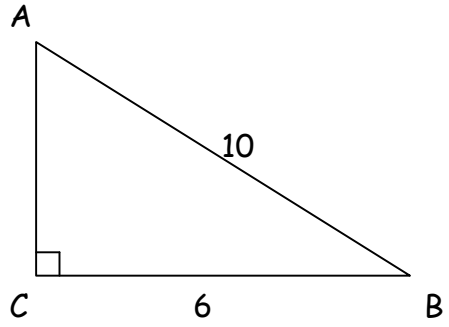
sen Â =_____

cos Â = _____

tan Â = _____

3) En cada uno de los siguientes triángulos, determina la razón trigonométrica que se pide, como en el ejemplo.

a)



sen $\hat{B}$ =

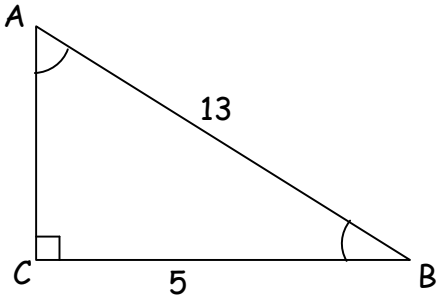
Sen B se define como cateto opuesto entre hipotenusa, el cateto opuesto del ángulo B no lo tenemos, usaremos el Teorema de Pitágoras para determinarlo.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$6^2 + b^2 = 10^2$$
$$b^2 = 10^2 - 6^2$$
$$b^2 = 100 - 36$$
$$b^2 = 64$$
$$\boxed{b = 8}$$

entonces:

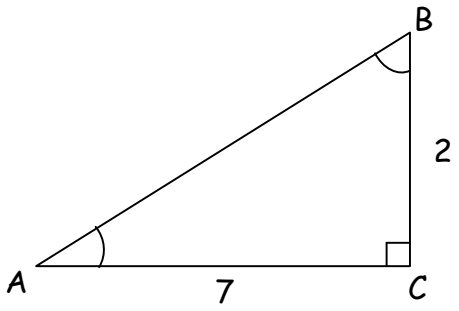
sen $B = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

b)



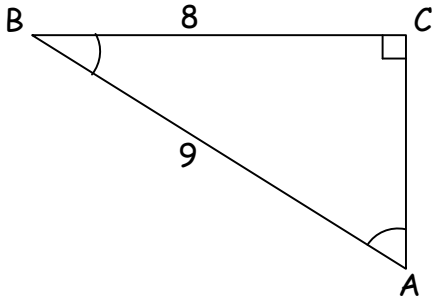
cos Â =

c)



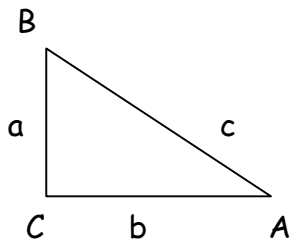
tan $\hat{B}$ =

d)

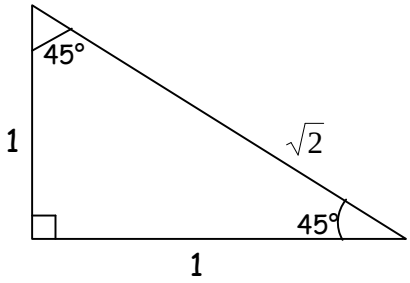


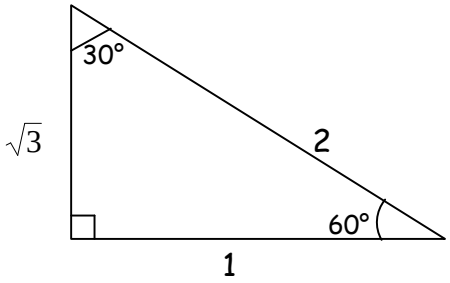
sen $\measuredangle$ A =

5.2. Razones Trigonométricas Recíprocas

Razones trigonométricas		Recíprocas
sen $\hat{A} = \frac{a}{c}$		csc $\hat{A} = \frac{c}{a}$
cos $\hat{A} = \frac{b}{c}$		sec $\hat{A} = \frac{c}{b}$
tan $\hat{A} = \frac{a}{b}$		ctg $\hat{A} = \frac{b}{a}$

Utilizando los triángulos que se dan completa la tabla.





	seno	coseno	tangente	cosecante	Secante	cotangente
45°		$1/\sqrt{2}$				
30°						$\sqrt{3}$
60ª				$\sqrt{3}$		

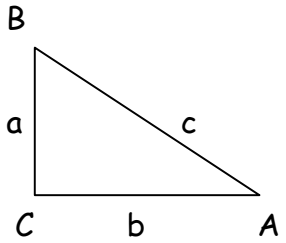
5.3. Valores inversos de las razones trigonométricas

Razones trigonométricas — Inversas

sen $\hat{A} = \frac{a}{c}$ — $\text{sen}^{-1} \frac{a}{c} = \hat{A}$

cos $\hat{A} = \frac{b}{c}$ — $\cos^{-1} \frac{b}{c} = \hat{A}$

tan $\hat{A} = \frac{a}{b}$ — $\tan^{-1} \frac{a}{b} = \hat{A}$



PROBLEMAS RESUELTOS

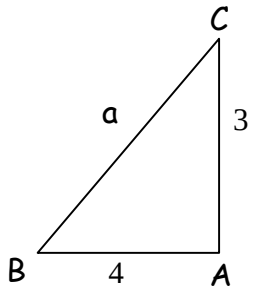
1. Determina el valor del ángulo A, si sabemos que sen A = .5.

Como sen $\hat{A}$ = .5

Entonces $\hat{A} = \text{sen}^{-1}$ .5

Usando la calculadora tenemos que $\hat{A}$ = 30°

2. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo B y el valor de a, B, C.



b = 3
c = 4
por T. de Pitágoras:
$a^2 = b^2 + c^2$
$a^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16$
$a = \sqrt{25} = 5$

sen B = $\frac{3}{5}$ cot B = $\frac{4}{3}$

cos B = $\frac{4}{5}$ sec B = $\frac{5}{4}$

tan B = $\frac{3}{4}$ csc B = $\frac{5}{3}$

Utilizando sen B = 3/5 = 0.6 y con la calculadora utilizando 2FN, INV, SHIFT según el modelo y después SIN, tenemos:
B = 36.87°

Por otra parte, para el triángulo tenemos:

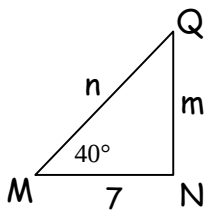
A + B + C = 180°

C = 180° – (A + B) = 180° – (90 + 36.87°)

C = 180° – 126.86ª

C = 53.13°

3. Calcula los valores que faltan en el siguiente triángulo rectángulo:



M + N + Q = 180
Q = 180 – (M + N) = 180 – (40 + 90)
Q = 180 – 130
Q = 50°

Utilizando una función de M o N que involucre el cateto que vale 7 y n tenemos:

cos M = $\frac{7}{n}$

despejo n:

$n = \frac{7}{\cos M} = \frac{7}{\cos 40°}$

$n = \frac{7}{.766} = 9.14$

cos 40° se obtiene en la calculadora

Utilizando una función que involucre m y el lado que vale 7 tenemos:

tan M = $\frac{m}{7}$

despejo m:

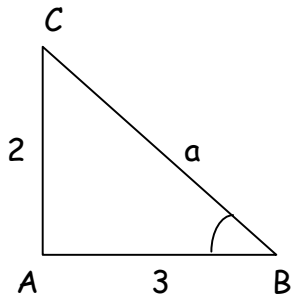
m = 7 tan M = 7 tan 40°
m = 7 (.839) = 5.87

tan 40° se obtiene en la calculadora

4. Con la tan B = $\frac{2}{3}$ calcula todas las demás funciones y los valores del triángulo respectivo.

Sabemos que tan B = $\frac{2}{3} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$

Formamos el triángulo rectángulo:



De acuerdo al teorema de Pitágoras

$a^2 = (2)^2 + (3)^2$

$a = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Entonces:

sen B = $\frac{2}{\sqrt{13}}$ cos B = $\frac{3}{\sqrt{13}}$ tan B = $\frac{2}{3}$

cot B = $\frac{3}{2}$ sec B = $\frac{\sqrt{13}}{3}$ csc B = $\frac{\sqrt{13}}{2}$

Ahora utilizando tan B = $\frac{2}{3}$ = .67 y con la calculadora oprimiendo las teclas 2FN o SHIFT y TAN, obtenemos el valor del ángulo B:

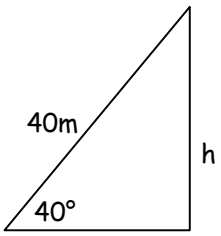
B = 33.69

Ahora tenemos que: A + B + C = 180

Entonces: C = 180 – (A + B) = 180 – (90 + 33.69)

C = 56.31°

5. La longitud de la cuerda que sujeta a un papalote es de 40 y el ángulo de elevación que se forma con la horizontal es de 40°. Calcula la altura a la que vuela el papalote.



sen 40° = $\frac{h}{40}$

h = 40 sen 40° = 40 (.6428)

h = 25.712 m

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Determina el valor del ángulo.

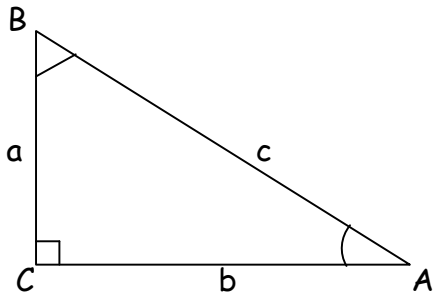
   a) ¿Si cos B = $\frac{7}{9}$, cuál es el valor de B?

   b) ¿Si tan A = $\frac{3}{2}$, cuánto mide A?

   c) ¿Si sen B = 0.421 cuánto mide B?

2) Resuelve los siguientes triángulos rectángulo.

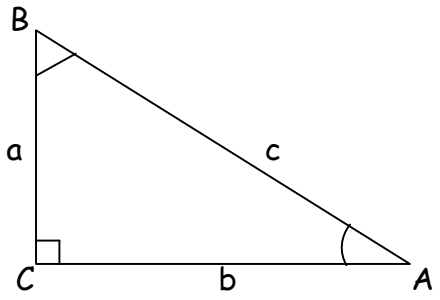
a)



$\hat{A}$ = 35°
c = 74.5

$\hat{B}$ = _____ a = _____ b = _____

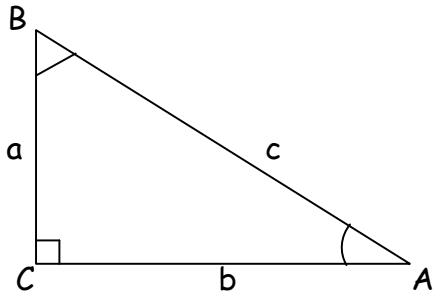
b)



$\hat{A}$ = 58°
a = 25.36

$\hat{B}$ = _____ b = _____ c = _____

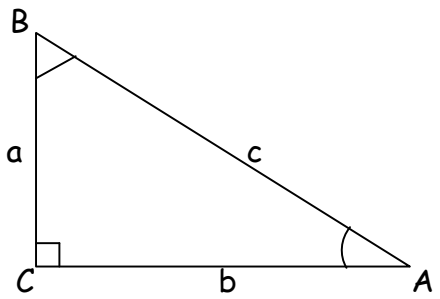
c)



$\hat{B}$ = 63°
C = 15

$\hat{A}$ = _____ a = _____ b = _____

d)

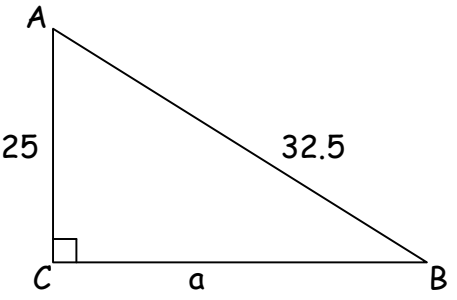


$\widehat{B} = 36° \; 10'$

$a = 12.5$

$\hat{A}$ = _____ b = _____ c = _____

e)

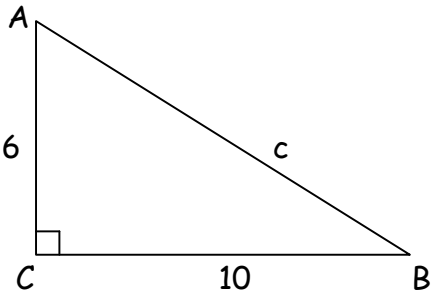


$\hat{A}$ = _____

$\hat{B}$ = _____

a = _____

f)

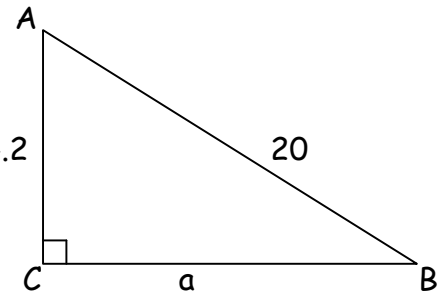


$\hat{A}$ = _____

$\hat{B}$ = _____

c = _____

g)

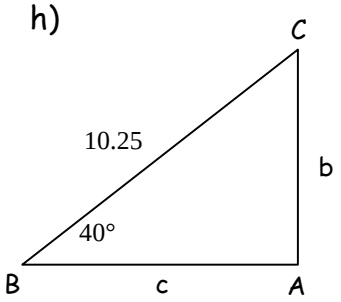


$\hat{A}$ = _____

$\hat{B}$ = _____

a = _____

h)

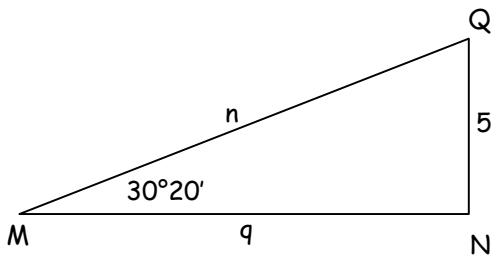


$\hat{C}$ = _____

$\hat{c}$ = _____

$\hat{b}$ = _____

i)

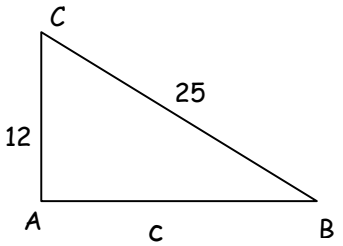


$\hat{Q}$ = _____

$\hat{h}$ = _____

$\hat{q}$ = _____

j)



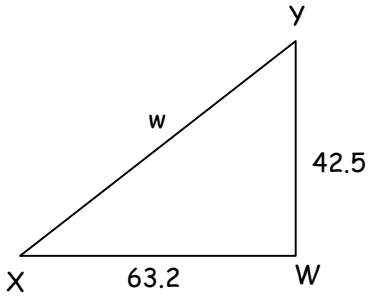
k)

$\hat{C}$ = _____

$\hat{B}$ = _____

c = _____

k)



$\hat{x}$ = _____

$\hat{y}$= _____

w = _____

3. ¿Qué ángulo forma con el pie de una es calera de 7m de largo, si dista de la base de un muro 2.5m?

4. Desde lo alto de un faro de 150m de altura se observa una embarcación a un ángulo de depresión de 23°; calcula la distancia del faro a la embarcación.

5. Un decágono regular está circunscrito a una circunferencia de 5cm de radio.
   Calcula:
   a) Lado del decágono.
   b) Perímetro.
   c) Área.

6. Una escalera de 7m de longitud se apoya contra el muro de un edificio de manera que la parte que se apoya en el piso queda a 3.5m de la pared. ¿Que altura alcanza la escalera sobre el muro del edificio? ¿Qué ángulo forma la escalera con el piso?

7. Se desea construir una rampa de 25m de largo que se levante a una altura de 5m. ¿Qué ángulo formará con el piso?

8. Un alambre sujeta una antena de radio desde la punta hasta un punto sobre el suelo a 40m de la base de la antena. Si el alambre forma un ángulo con el suelo de 58°25′, ¿cuál es la altura de la antena?

9. Un pentágono regular está inscrito en un círculo de diámetro igual a 10cm.

Calcula:
a) Lado del decágono.
b) Perímetro.
c) Área.

10. Calcula el radio del círculo inscrito en un hexágono regular cuyo lado es de 0.75m.

11. Calcula el perímetro y la superficie de un rectángulo cuya diagonal mide 40cm, sabiendo que el ángulo que forma la diagonal con uno de sus lados es de 36°.

12. Los lados de un triángulo isósceles miden 30, 45 y 45 unidades. Calcula la medida de sus lados.

13. Calcula todas las funciones del ángulo M si:

a) tan M = $\frac{3}{7}$ b) csc M = $\frac{10}{3}$ c) cos M = $\frac{5}{12}$

d) ctg M = $\frac{16}{14}$ e) sec M = $\frac{20}{10}$

SOLUCIONES

1. a) $\hat{B} = 38.94°$, b) $\hat{A} = 56.30°$ $\hat{B} = 24.89°$
2. a) $\hat{B} = 55°$ a = 42.731 b = 61.027
   b) $\hat{B} = 32°$ b = 15.84 c = 29.9
   c) $\hat{A} = 27°$ a = 6.80 b = 13.36
   d) $\hat{A} = 53°50'$ b = 9.13 c = 15.48
   e) $\hat{A} = 62.01°$ $\hat{B} = 27.98°$ a = 28.69
   f) $\hat{A} = 32°$ $\hat{B} = 58°$ c = 18.86
   g) $\hat{A} = 44°45'$ $\hat{B} = 45°14'$ a = 14.08
   h) C = 50° b = 6.588 c = 7.851
   i) Q = 59°40′ q = 8.545 n = 9.9
   j) c = 21.931 B = 28°41′ c = 61°19′
   k) w =76.160 X = 33°55′ Y = 56°05′
3. 69.07°
4. 353.37 m
5. lado 3.24 cm, p = 32.49 cm, Área = 81.22 cm^2

6. h = 6.547 $\theta = 60°$

7. B = 11.536°

8. h = 65.06m

9. Lado 5.87 cm, p = 29.38 cm, A = 59.43 cm^2

10. r = .65 m

11. P = 111.74 cm, A = 760.84 cm^2

12. 70.5°, 70.5° y 39°

13. a)

$$sen\,M = \frac{3}{7.615}$$
$$\cos M = \frac{7}{7.615}$$
$$\tan M = \frac{3}{7}$$
$$\cot M = \frac{7}{3}$$
$$\sec M = \frac{7.615}{7}$$
$$\csc M = \frac{7.615}{3}$$

b)

$$sen\,M = \frac{3}{10}$$
$$\cos M = \frac{9.539}{10}$$
$$\tan M = \frac{3}{9.539}$$
$$\cot M = \frac{9.539}{3}$$
$$\sec M = \frac{10}{9.539}$$
$$\csc M = \frac{10}{3}$$

c)

$$sen\,M = \frac{10.908}{12}$$
$$\cos M = \frac{5}{12}$$
$$\tan M = \frac{10.908}{5}$$
$$\cot M = \frac{5}{10.908}$$
$$\sec M = \frac{12}{5}$$
$$\csc M = \frac{12}{10.908}$$

d)

$$sen\,M = \frac{14}{21.26}$$
$$\cos M = \frac{16}{21.26}$$
$$\tan M = \frac{14}{16}$$
$$\cot M = \frac{16}{14}$$
$$\sec M = \frac{21.26}{16}$$
$$\csc M = \frac{21.26}{14}$$

e)

$$sen\,M = \frac{17.32}{20}$$
$$\cos M = \frac{10}{20}$$
$$\tan M = \frac{17.32}{10}$$
$$\cot M = \frac{10}{17.32}$$
$$\sec M = \frac{20}{10}$$
$$\csc M = \frac{20}{17.32}$$

5.4. Identidades Trigonométricas

Recíprocas

$$sen\ \hat{A} = \frac{1}{\csc A}, \qquad \csc = \frac{1}{senA}, \qquad senA.\csc A = 1$$

$$\cos\ \hat{A} = \frac{1}{\sec A}, \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A}, \qquad \cos A.\cos A = 1$$

$$\tan \hat{A} = \frac{1}{ctgA}, \qquad ctgA = \frac{1}{\tan gA}, \qquad \tan gA.ctgA = 1$$

División

$$\tan A = \frac{senA}{\cos A}$$

$$ctgA = \frac{\cos A}{senA}$$

Pitagóricas

$$sen^2 + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

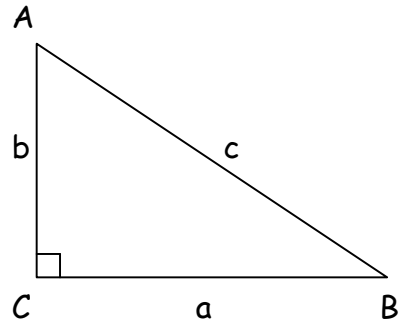
$$1 + ctg^2 A = \csc^2 A$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Justifica las Identidades anteriores como en el ejemplo.

Mostraremos que sen^2 A + cos^2 A = 1.

El teorema de Pitágoras aplicado al siguiente Δ rectángulo nos da:



$a^2 + b^2 = c^2$

Dividiendo esta expresión entre c^2, tenemos:

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2},\quad de\ donde\quad \left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1...$$

Recordemos que en el triángulo anterior:

sen A = $\frac{a}{c}$ y cos A = $\frac{b}{c}$ sustituyendo en 1, tenemos sen ^{2} $\hat{A}$ + cos^2 $\hat{A}$ = 1

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.Justifica las siguientes identidades.

a) Tan $x=\frac{senx}{\cos x}$

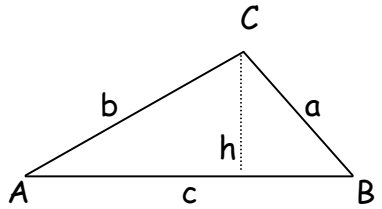
b) $sen\ \ a.\csc\ =1$

c) $1+\tan^2 B=\sec^2 B$

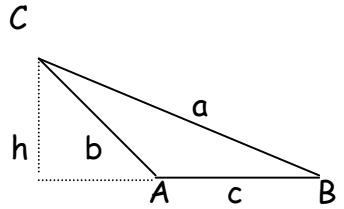
TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

5.5. Leyes de Senos y Cosenos

Se llaman así a los triángulos que no tienen un ángulo de 90°. Es decir a los triángulos acutángulos (todos los ángulos internos agudos) y los triángulos obtusángulos (un ángulo interno es obtuso):



Triángulo acutángulo



Triángulo obtusángulo

Los elementos son:

3 lados a, b, c

3 ángulos A, B, C

Al igual que a los triángulos rectángulos, podemos calcular los elementos de un triángulo oblicuángulo conociendo sólo 3 datos (a excepción de conocer los 3 ángulos internos). Para ello utilizamos dos leyes:

Ley de senos

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$$

Ley de cosenos

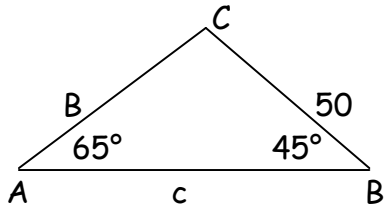
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcula los valores que faltan:



A + B + C = 180°

C = 180° – (A + B)

C = 180° – (65° + 45°) = 180° – 110°
C = 70°

Por ley de senos:

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B}$$

Despejo b: $b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A} = \frac{(50) \text{ sen } 45°}{\text{sen } 65°} = \frac{(50)\,(0.7071)}{0.9063}$

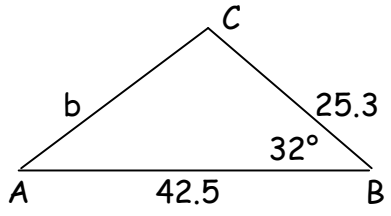
$\boxed{B = 39.01}$

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{c}{sen\,C}$$

Despejo c: $c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \frac{(50) \text{ sen } 70°}{\text{sen } 65°} = \frac{(50)\,(0.9397)}{0.9063}$

$\boxed{C = 51.84}$

2. Calcula los valores que faltan:



Por ley de senos no podemos resolverlo, entonces, utilizamos ley de cosenos

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

Sustituimos valores:

$b^2 = (25.3)^2 + (42.5)^2 - 2\,(25.3)\,(42.5)\cos 32°$

$b^2 = 640.09 + 1806.25 - 2150.5\,(0.8480)$

$b^2 = 640.09 + 186.25 - 1831.64$

$b^2 = 622.716$

$b = \sqrt{622.716} = 24.95$

Utilizando:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

despejo cos A:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

sustituimos valores:

$$\cos A = \frac{24.95)^2 + (42.5)^2 - (25.3)^2}{2\,(24.95)\,(42.5)} = 0.8435$$

con la calculadora obtenemos A:

$A = \cos^{-1}(0.8435)$

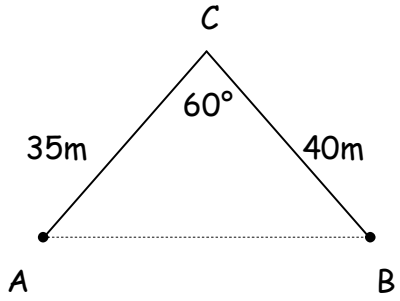
$A = 32.5°$

$A + B + C = 180$

$C = 180 - (A + B) = 180 - (32.5 + 32)$

$C = 180 - 65.5 = 115.5°$

3. Para calcular la distancia entre dos puntos A y B, separados por un obstáculo, se ha escogido un punto C, tal que CA = 35m, CB = 40m; además el en C mide 60° ¿cuál es la distancia AB?



por ley de cosenos:

$\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - 2\,(\overline{CA})\,(\overline{CB})\cos 60°$

sustituimos valores:

$AB^2 = (35)^2 + (40)^2 - 2\,(35)\,(40)\,(0.5)$

$AB^2 = 1225 + 1600 - 1400 = 1425$

$AB = \sqrt{1425}$

$\overline{AB} = 37.74$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Resuelve los siguientes triángulos oblicuángulos, utilizando ley de senos o ley de cósenos.

   a) Triángulo con vértices en M, N y Q y que tiene los siguientes datos:
   m = 26 n = 23 q = 18

   b) Triángulo con vértices en A, B y C y con datos:
   a = 50 b = 48 B = 36°

   c) Triángulo con vértices en A, B y C y con datos:
   a = 12.30m B = 38°20′ C = 77°10′

   d) Triángulo con vértices en A, B y C y con datos:
   a = 5.2cm c = 4.6cm C = 35°

2. Resuelve los siguientes problemas utilizando la ley de senos.

   a) Dos personas de frente y a 2500 metros una de otra en el mismo nivel horizontal, observan un avión con ángulos de elevación de 50° y 65°. Halla la altura del avión.

b) Calcula el perímetro y el área de un paralelogramo, si una de sus diagonales mide 17 cm y los ángulos que forman ésta con los lados son de 35° y 49°.

c) Dos hombres, uno detrás de otro, que están en el campo en un llano, separados 3000 m, observa un helicóptero. Sus ángulos de elevación respecto al objeto volador son de 60° y 75°. Determina la altura del helicóptero.

d) Un extremo de un tablón de 15.5 pies es colocado sobre el suelo en un punto a 10.8 pies del inicio de una inclinación de 42° y el otro extremo se deja descansar sobre la inclinación. ¿Qué tanto sobre el plano inclinado se extiende el tablón?

e) Una antena de transmisiones de 300 pies está en la cima de una colina cuyos lados están inclinados a 18° con la horizontal. ¿Qué tan lejos hacia debajo de la colina se extenderá un cable de soporte de 250 pies si está atado a la mitad de la altura de la antena?

f) La estación Bravo de la guardia costera está localizada 230 mi. Hacia el norte de una estación automatizada de búsqueda y rescate. La estación Bravo recibe un mensaje de auxilio de un petrolero con una orientación N56°O y la estación automatizada recibe el mismo mensaje con un rumbo de N52°E ¿Cuánto le tomará llegar a un helicóptero, desde el Bravo hasta el petrolero, si puede volar a 125 mi/h?

g) Un globo es atado a un puente mediante una cuerda. Para encontrar la altura del globo sobre la superficie del puente, una muchacha mide la longitud del puente y los ángulos de elevación del globo en cada extremo del puente. Encuentra que la longitud de éste es de 362 pies y los ángulos de elevación son 64° y 74°. Determina la altura del globo.

h) Un barco que navega directamente hacia el este observa un faro con una orientación N80°E. Cuando el barco ha recorrido 2250m, la orientación del faro es N20°E. Si el barco continúa navegando sin alterar su rumbo, ¿Cuál será la menor distancia a que pasará del faro?

i) Dos fotógrafos que están a 300 pies de distancia entre sí, ven un león a lo lejos. Las líneas de visión de los fotógrafos hacia el león y entre sí forman un triángulo. Calcula la distancia que hay entre el león y los fotógrafos, si el ángulo cuyo vértice es el primer fotógrafo mide 37° y el del segundo fotógrafo es de 60°.

j) Un poste está sostenido por dos cables que van desde el tope de éste hasta el suelo, a lados opuestos del mismo. Un cable tiene 60 pies de longitud y forma un ángulo de 36° con la horizontal y el segundo forma un ángulo de 40°. Calcula la longitud del segundo cable.

3. Resuelve los siguientes problemas utilizando la ley de cosenos.

a) Una montaña separa los puntos A y B. La distancia AC = 320 m, la distancia CB = 250 m y el ángulo ACB = 60°. Halla la distancia AB.

b) Los tres lados que limitan un terreno miden 315 m, 480 m y 500 m. calcula los ángulos que forman dichos lados.

c) Un terreno está limitado por tres calles que se cortan. Los lados del terreno miden 312 m, 472 m y 511 m. Halla los ángulos formados por las calles al cortarse.

d) Tres circunferencias, cuyos radios respectivos miden 115, 150 y 225 milímetros, son tangentes exteriores entre sí. Encuentra los ángulos que se forman cuando se unen los centros de las circunferencias.

e) Para calcular la anchura BC de una bahía, se miden, desde un punto A, dos distancias, AB = 8 km, AC = 9 km y el ángulo BAC mide 65°. Calcula el ancho de la bahía.

f) La magnitud de la resultante de dos fuerzas de 110 kg y 210 kg es de 270 kg. Encuentra el ángulo formado por las direcciones de las fuerzas componentes.

g) Dos automóviles parten de un mismo punto al mismo tiempo. Uno de ellos viaja directamente al este, a una velocidad de 40 km por hora, y el otro viaja hacia el noreste a razón de 50 km por hora. Calcula la distancia que hay entre los automóviles al cabo de dos horas.

h) La distancia que hay entre las ciudades de Davis y Sacramento es de 16 millas y la distancia que hay entre Davis y Woodland es de 11 millas y el ángulo cuyo vértice es Davis mide 80°. Determina la distancia entre Woodland y Sacramento.

i) Un niño sostiene dos globos. El ángulo de elevación del globo que tiene en la mano derecha es de 20° y la cuerda mide 60 metros. El ángulo de elevación del globo que sostiene en la mano izquierda es de 26° y la cuerda mide 75 metros. Calcula la distancia entre los dos globos.

j) Los lados de un triángulo son 3, 8 y 9. Halla la altura del triángulo correspondiente al vértice del ángulo más pequeño.

4. Resuelve los siguientes problemas utilizando Ley de senos o cósenos según el caso.

a) Un barco navega 500 millas hacia el noreste y luego 800 millas hacia el este. Calcula la distancia entre el punto de partida y el punto final.

b) Dos barcas están separadas 70 m, y una boya se encuentra a 85 m de la barca más alejada, de modo que forma un triángulo oblicuángulo y el ángulo en la boya es de 53°18′ ¿cuál es la distancia de la boya a la barca más próxima?

RESPUESTAS

1. a) M = 77° 40′ N = 59° 43′ Q = 42° 37′
   b) A = 37° 45′ C = 106° 15′ c = 78.34
   c) A = 64° 30′ b = 8.455m c = 13.29m
   d) b = 7.762cm A = 40° 25′ B = 104° 35′

2. a) 1915.11 m
   b) p = 45.41 cm, A = 125.79 cm^2
   c) h = 3549.03
   d) x = 5.68 ft
   e) x = 158.94 ft
   f) t = 1 hora 31 min 28 seg
   g) 339.58 ft
   h) d = 423.94 m
   i) a = 181.90 ft
   j) a = 54.86 ft

3. a) 291.37 m
   b) 74°44′, 37°25′, 67°50′
   c) 64°49′, 36°44′, 78°26′
   d) 61°21′, 43°9′, 75°28′
   e) 9.17 km
   f) 111°11′
   g) 71.31 km
   h) 17.77 mi
   i) 124.40 m
   j) 7.8

4. a) d = 569.49 millas
   b) d = 66.74 m

BIBLIOGRAFÍA

1. Fuenlabrada, de la Vega S. *Matemáticas II Geometría y Trigonometría*. México, McGraw-Hill, 1994.

2. Guzmán, Herrera Abelardo. *Geometría y Trigonometría*. México, Publicaciones Cultural, 1994.

3. Martínez, Aguilera Miguel Ángel. *Matemáticas II Geometría y Trigonometría*. México, McGraw-Hill, 1997.

4. Smith, Stanley A. et al. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*. Traducción Carlos torres Alcaraz. México, Prentice-Hall, 1998.