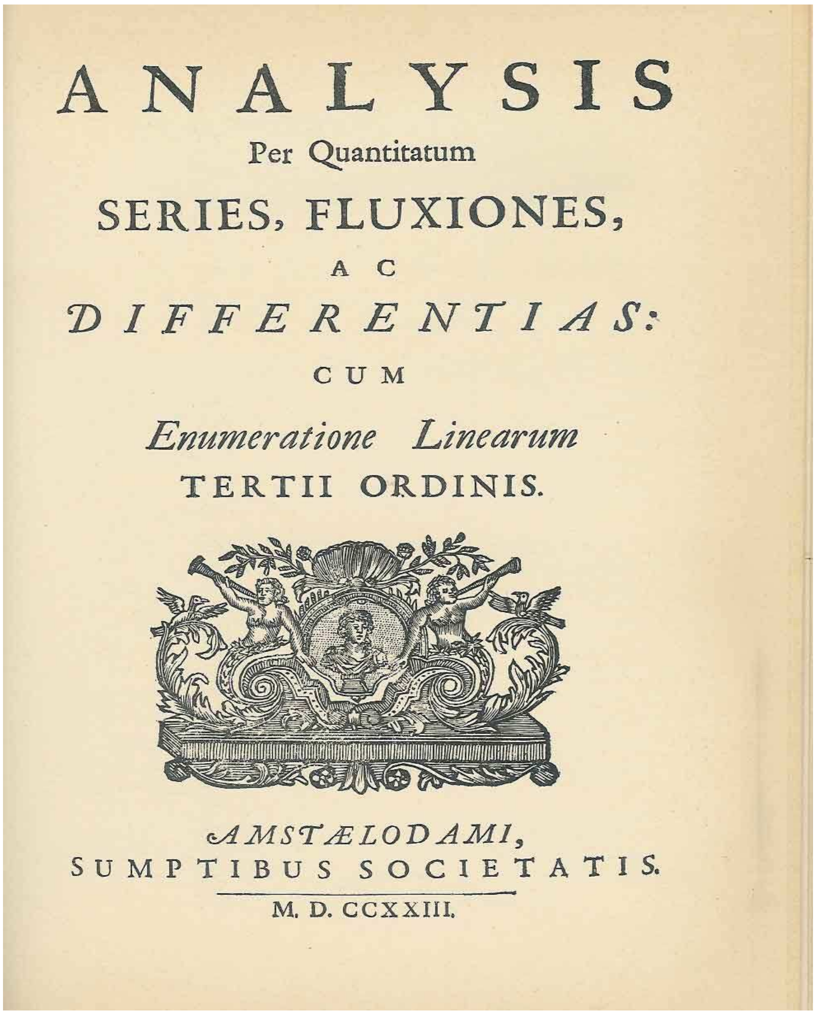
Universidad Nacional Autónoma de México
Colegio de Ciencias Y Humanidades
Plantel Sur
Academia de Matemáticas

Guía para el examen extraordinario de la materia de Cálculo Diferencial e Integral II



ANALYSIS
Per Quantitatum
SERIES, FLUXIONES,
AC
DIFFERENTIAS:
CUM
Enumeratione Linearum
TERTII ORDINIS.

AMSTÆLODAMI,
SUMPTIBUS SOCIETATIS.
M. D. CCXXIII.

Autores:

PROF. MA. EUGENIA LEÓN CANO
PROF. MA. DE JESÚS MÁRQUEZ SANTILLAN.
PROF. GILBERTO FUENTES ROMERO.
PROF. HELIOS BECERRIL MONTES
PROF. JOSÉ CHACÓN CASTRO.
PROF. DANIEL FLORES IBARRA

ÍNDICE

Como utilizar esta guía

Amigo lector, el trabajo que tienes en tus manos lo hemos realizado con el deseo de que te ayude a aprobar el examen extraordinario, los autores se sentirán altamente recompensados en su labor educativa al saber que lo has aprovechado y que te ha sido de utilidad. Por tu parte el esfuerzo realizado te acercará a tu siguiente meta: tus estudios de licenciatura.

Cada unidad de esta guía se compone de un propósito(s) y tres secciones. Al inicio de cada unidad encontrarás el propósito(s) de ésta, posteriormente, los aprendizajes a lograr por tu esfuerzo, a continuación se hace énfasis en las estrategias de aprendizaje y finalmente las actividades de aprendizaje con sus respuestas correspondientes para que puedas medir tu avance.

Un punto importante para el mejor aprovechamiento de ésta guía es que cuentes con al menos un libro de Cálculo, y que éste sea tu principal apoyo, ya que esta guía es una serie de lineamientos generales sobre los temas, la referencia sobre el libro de texto la encontrarás en la bibliografía

Por último, recuerda que en la Academia de Matemáticas (Edificio F, planta alta) tenemos horas de asesorías para resolver tus dudas, por favor visítanos.

Atentamente

Noviembre de 2005, Academia de Matemáticas CCH-Sur

UNIDAD 1. Derivadas de funciones transcendentes

Propósitos:

Avanzar en la comprensión y manejo de la derivada, al estudiarla en funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, para cubrir situaciones que se modelan con funciones trascendentes. Retomar las relaciones entre las graficas de una función y su derivada.

Aprendizajes a lograr por los educandos en la unidad:

- Analiza las gráficas de las funciones seno y coseno y a partir de ellas, bosqueja la gráfica de su respectiva derivada.
- Identifica en cada caso la derivada respectiva de las funciones seno y coseno.
- Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas también involucran variación periódica.
- Utiliza las derivadas de las funciones seno y coseno, y reglas de derivación para obtener las derivadas de las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante.
- Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas cuyo argumento es función de x.
- Aplica las derivadas de funciones trigonométricas en problemas diversos
- Analiza las graficas de las funciones logarítmica y exponencial y a partir de ellas bosqueja las graficas de sus derivadas.
- Identifica en cada caso la derivada respectiva de las funciones logarítmica y exponencial
- Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones logarítmica y exponencial cuyo argumento es función de x.
- Aplica las derivadas de funciones logarítmica y exponencial a problemas diversos

Estrategias de aprendizaje.

- Reconoce las características y diferencias de las funciones logarítmicas y exponenciales.
- Utiliza procedimientos de tabulación para entender el comportamiento de los valores de las funciones.
- Procede a resolver problemas con las reglas de derivación de estas funciones.
- Identifica los elementos y las relaciones que intervienen en el problema.
- Reconoce la importancia de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas como el elemento clave en la resolución de problemas cotidianos

Actividades de aprendizaje

Función exponencial

Ejemplo 1

Un cultivo de bacterias crece de manera que cada una se divide en dos, y a la siguiente hora, cada una de las nuevas bacterias se vuelve a partir en dos, y así sucesivamente.

Si inicialmente hay 1 bacteria,

a) ¿Cuántas bacterias habrá después de 4, 5 y 8 horas? Tabulemos el número de bacterias después de cada hora

t (hrs.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Bacterias	1	2	4	8	16	32	64	128	256

Así, después de 4 horas habrá 16 bacterias, después de 5 horas habrá 32 bacterias, después de 8 horas habrá 256.

b) ¿Cómo se puede calcular la población de bacterias después de t horas?

Observando la tabla anterior podemos ver que la población de bacterias crece de manera que con cada hora se duplica.

t (hrs.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Bacterias	1	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8

Por lo que un modelo para esta situación sería $B(t) = 2^t$

Si originalmente hubiera 5 bacterias, el modelo sería $B(t) = 5 \cdot 2^t$

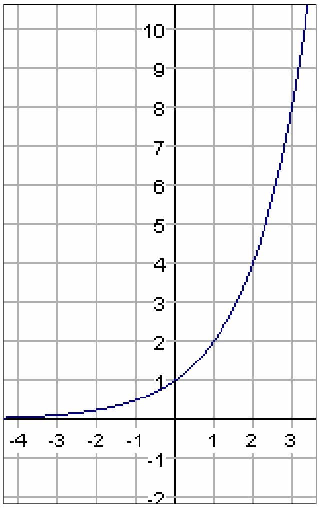
Funciones como la del ejemplo son llamadas funciones exponenciales, porque su regla de correspondencia contiene la variable como exponente, en general tienen la forma:

$$f(x) = Ab^x$$

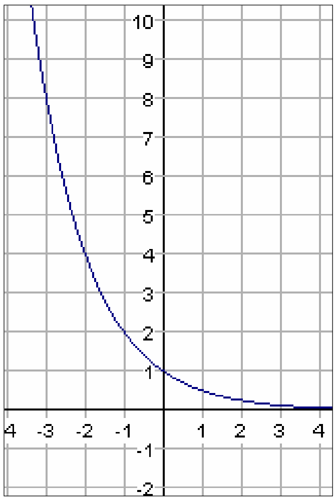
donde x toma cualquier valor real, b es un número positivo diferente de 1 y A es cualquier número real, diferente de cero.

Una buena manera de observar este tipo de situaciones es construyendo gráficas de las funciones

Crecimiento exponencial
b > 1



Decremento exponencial
0 < b < 1



Función logarítmica

Una función logarítmica es la que tiene como regla de correspondencia una expresión logarítmica, es decir, es de la forma:

$$f(x) = A\log_b Cx$$

donde b es un número positivo diferente de 1, A es cualquier número real diferente de cero y Cx es un valor positivo, con C y x números reales del mismo signo.

Recordemos que:

Logaritmo de un número x *en la base a* es el exponente que afecta a esa base para obtener el número x

Si se tiene la expresión exponencial $a^n = m$ n es el logaritmo del número *m* (en base *a*)

$$\therefore \log_a m = n$$

Cuando la base del logaritmo es el número *e*, se le denomina **logaritmo natural**.

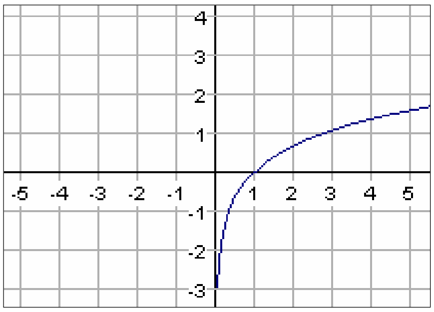
$$\log_e m = \ln m$$

Cuando la base del logaritmo es 10, se le denomina **logaritmo común o decimal**.

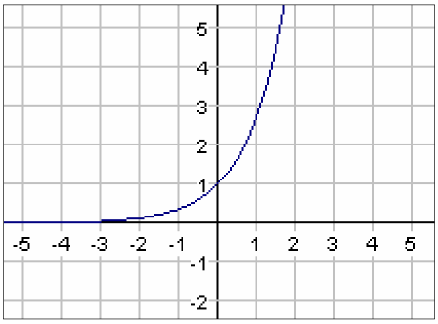
$$\log_{10} m = \log m$$

Si se construye la gráfica de la función logarítmica y la exponencial:

$f(x) = \ln x$



$f(x) = e^x$



Se puede observar que las funciones logarítmica y exponencial son inversas puesto que sus gráficas son simétricas con respecto a la gráfica de la función idéntica ($y = x$)

Consecuentemente, el comportamiento operacional de los logaritmos está ligado al comportamiento de los exponentes.

Esto nos permite obtener las propiedades operativas de los logaritmos deducidas de las leyes de exponentes, ya que la expresión exponencial $a^n = m$ es equivalente a la expresión logarítmica $\log_a m = n$

Leyes de los exponentes		Propiedades de logaritmos
$(a^x)^y = a^{xy}$	$\rightarrow$	$\log_a x^n = n\log_a x$
$a^x a^y = a^{x+y}$	$\rightarrow$	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\rightarrow$	$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Para transformar los logaritmos de una base a otra se utiliza: $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$

En particular, $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Derivada de Funciones exponenciales y logarítmicas

Para derivar funciones exponenciales y logarítmicas, utilizaremos las siguientes fórmulas:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad\qquad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{u}$$

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u \cdot \frac{d}{dx}u \qquad\qquad \frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\cdot\frac{d}{dx}u$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \qquad\qquad \frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \cdot \frac{d}{dx}u \qquad\qquad \frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\cdot\frac{d}{dx}u$$

En la bibliografía que se te recomienda podrás encontrar la forma en que se deducen o se demuestran las fórmulas anteriores

Ejemplos:

1.- Para derivar la función $f(x) = e^{5x^2-8}$

Elegimos la fórmula de derivación que se ajuste a la estructura de la regla de correspondencia de la función, en este caso:

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u \cdot \frac{d}{dx}u \qquad \text{donde} \quad u = 5x^2 - 8,$$

por lo que al sustituir:

$$\frac{d}{dx}e^{5x^2-8} = e^{5x^2-8}\frac{d}{dx}(5x^2-8) = e^{5x^2-8}\cdot 10x$$

y obtenemos que $\frac{d}{dx}e^{5x^2-8} = 10xe^{5x^2-8}$

2.- Para derivar $f(x) = 5^{4-x}$

Se elige la fórmula de derivación que se ajuste, en este caso:

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \cdot \frac{d}{dx}u$$ donde $a = 5$ y $u = 4 - x$,

y se tiene que:

$$\frac{d}{dx}5^{4-x} = 5^{4-x}\ln 5 \cdot \frac{d}{dx}(4-x) = 5^{4-x}\ln 5(-1)$$

finalmente $\frac{d}{dx}5^{4-x} = -5^{4-x}\ln 5$

3.- Para derivar $f(x) = \ln(3x - x^3)$

Elegimos la fórmula de derivación que se ajusta:

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\cdot\frac{d}{dx}u$$ con $u = (3x - x^3)$,

por lo que:

$$\frac{d}{dx}\ln(3x - x^3) = \frac{1}{3x - x^3}\cdot\frac{d}{dx}(3x - x^3) = \frac{1}{3x - x^3}(3 - 3x^2)$$

y obtenemos $\frac{d}{dx}\ln(3x - x^3) = \frac{3 - 3x^2}{3x - x^3}$

4.- Para derivar *f(x)* = log $(7x^2)$

Se elige la fórmula de derivación que se ajusta:

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\cdot\frac{d}{dx}u$$ donde $a = 10$ *y* $u = 7x^2$,

por lo que:

$$\frac{d}{dx}\log 7x^2 = \frac{1}{(7x^2)\ln 10}\cdot\frac{d}{dx}(7x^2) = \frac{1}{(7x^2)\ln 10}\cdot(14x)$$

y simplificando, se obtiene: $\frac{d}{dx}\log 7x^2 = \frac{2}{x\ln 10}$

Aplicaciones

Ejemplo

El valor *V* de un objeto a los *t* años de su adquisición se calcula mediante la función:

$V(t) = 15\ 000\ e^{-\ 0.6286t}$ con $0 \leq t \leq 10$.

a) ¿Cuál es el valor inicial del objeto? ¿Qué valor tendrá a los 5 años?
b) Calcula e interpreta la razón de cambio de *V* respecto a *t* cuando $t = 1$ y $t = 5$.
c) Traza la gráfica de la función.

Solución

a) El valor inicial del objeto corresponde a $V(0) = 15\ 000\ e^{-0.6286\ (0)} = 15000(1)$, por lo que el objeto vale inicialmente $ 15,000

Como $V\ (5) = 15\ 000\ e^{-0.6286\ (5)} = 15\ 000\ e^{-0.6286\ (5)} = 15\ 000\ (\ \ 0.04315\ ) = 647.2971$, entonces después de 5 años el objeto tendrá un valor aproximado de $ 647.30

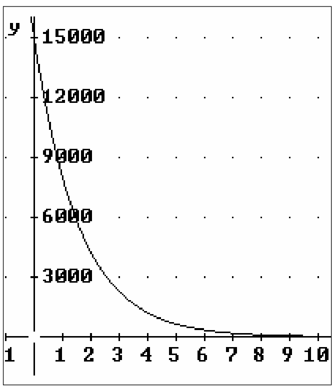
b) La razón de cambio de una función es igual a su derivada, y para la función *V(t)* se tiene:

$V'\ (t) = 15\ 000\ e^{-0.6286t}\ (-0.6282) = 9429\ e^{-0.6286t}$

Calculando $V'\ (1) = 9429\ e^{-0.6286(1\ )} = \ -5028.8435$, concluimos que, después de un año de su adquisición el objeto pierde su valor a una razón de aproximadamente $5028.84 por año

Ahora, $V'\ (5) = 9429\ e^{-0.6286(5)} = -406.8909$, entonces a los 5 años el objeto pierde su valor a una razón aproximadamente de $ 409.89 por año

c) La gráfica de la función *V (t)* es



Ejercicios 1

I.- Comprueba cada una de las siguientes funciones derivadas:

i.	$y = e^{x^3}$	$y' = 3x^2 e^{x^3}$
ii.	$y = x^2 e^{-x}$	$y' = e^{-x}(2x - x^2)$
iii.	$y = \log(3x^2 - 5)$	$y' = \dfrac{6x}{(3x^2 - 5)\ln 10}$
iv.	$y = \ln(x+3)^2$	$y' = \dfrac{2}{x+3}$
v.	$f(x) = \ln^2(x+3)$	$f'(x) = \dfrac{2\ln(x+3)}{x+3}$
vi.	$y = \left(\dfrac{a}{x}\right)^x$	$\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{a}{x}\right)^x (\ln\left(\dfrac{a}{x}\right) - 1)$
vii.	$s = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$	$s' = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
viii.	$y = \ln(\dfrac{x^2}{1+x^2})$	$y' = \dfrac{2}{x + x^3}$
ix.	$f(a) = \ln(a^2 e^a)$	$f'(a) = \dfrac{2}{a} + 1$
x.	$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$	$f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$
xi.	$y = x^x$	$y' = x^x(1 + \ln x)$
xii.	$s = t^{\sqrt{t}}$	$s' = \dfrac{t^{\sqrt{t}}(2 + \ln t)}{2\sqrt{t}}$
xiii.	$s = t^{\ln t}$	$\dfrac{ds}{dt} = 2t^{\ln t - 1}\ln t$
xiv.	$f(x) = \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}$	$f'(x) = \dfrac{4a}{(e^{ax} + e^{-ax})^2}$

II.- Realiza las operaciones adecuadas y escribe la opción de la respuesta correcta

1. La función derivada de $f(x)=e^{5x}$, es: ( )

A) $f'(x)=e^{5x}$

B) $f'(x)=5e^{5x}$

C) $f'(x)=5xe^{5x}$

D) $f'(x)=5e^{5x-1}$

E) $f'(x)=5e^{5x+1}$

2. La función derivada de $f(x)=\ln(x^2-5)$, es: ( )

A) $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-5}$

B) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-5}$

C) $f'(x)=-\dfrac{2x}{x^2-5}$

D) $f'(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5}$

E) $f'(x)=\dfrac{x}{x^2-5}$

3. La función derivada de $f(x)=\log(-x^2)$, es: ( )

A) $f'(x)=\dfrac{2\log e}{x}$

B) $f'(x)=-\dfrac{2}{x}$

C) $f'(x)=\dfrac{2}{x\ln 10}$

D) $f'(x)=\dfrac{2}{x}$

E) $f'(x)=-\dfrac{\log e}{x}$

4. La función derivada de $f(x) = \ln(e^{x^2} - x)$, es: (   )

A) $f'(x) = \dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2} - x}$

B) $f'(x) = 2xe^{x^2}$

C) $f'(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2} - x}$

D) $f'(x) = 2xe^{x^2} - 1$

E) $f'(x) = \dfrac{2xe^{x^2} - 1}{e^{x^2} - x}$

5. La función derivada de $f(x) = xe^{x^2}$, es: (   )

A) $f'(x) = xe^{x^2}$

B) $f'(x) = 2x^2e^{x^2}$

C) $f'(x) = 2x^2e^{x^2} + e^{x^2}$

D) $f'(x) = xe^{x^2} + e^{x^2}$

E) $f'(x) = 2xe^{x^2} + xe^{x^2}$

6. La función derivada de $f(x) = \ln x^2 - 5x$, es: (   )

A) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

B) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - 5$

D) $f'(x) = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 5x}$

C) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x}$

E) $f'(x) = \dfrac{2}{x} - 5$

III.- Para cada una de las siguientes funciones, determina su función derivada:

i. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$

ii. $y = e^{\frac{1}{x^2}}$

iii. $f(t) = \log \dfrac{1}{t^2+1}$

iv. $s = \ln(4t^3 - 5t^2 + 2t)$

v. $y = 12^{7x^3}$

vi. $f(x) = 5xe^{3x}$

vii. $f(x) = 3e^{3x+e}$

viii. $y = \log(e^x - 3x)$

IV.- **Aplicaciones**

1.- **Producción**. La producción de madera *M* (en millares de m^3 por hectárea) de un bosque de edad de *t* años se calcula por medio de la función $M(t) = 6.7\ e^{-48.1/t}$

a) Calcula el volumen límite de la madera por hectárea cuando *t* tiende a infinito.
b) Halla e interpreta la razón de cambio de *M* cuando *t* = 20 y *t* = 60 años.

2.- **Depreciación**. Después de *t* años, el valor de un automóvil adquirido en $60,000 es

$V(t) = 60\ 000(¾)^t$.

a) Grafica la función y halla el valor del automóvil 2 años después de su compra.
b) Calcula e interpreta la razón de cambio de *V* respecto a *t* para *t* = 1 y *t* = 4.
c) Grafica $V'(t)$ y halla su asíntota horizontal. Interpreta su significado en el contexto del problema.

Razones y Funciones Trigonométricas

En la Trigonometría se estudian las relaciones numéricas que existen entre las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos de un triángulo y su aplicación en el cálculo de sus diversos elementos.

Una *razón trigonométrica* es la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo con respecto a alguno de sus ángulos agudos, es decir, las razones de los lados de un triángulo rectángulo son funciones de los ángulos agudos del triángulo.

Como sabemos los lados de un triángulo rectángulo reciben nombres específicos, así, el lado opuesto al ángulo recto es la *hipotenusa,* y los lados que forman al ángulo recto son los *catetos*.

Para un ángulo θ, las seis *razones trigonométricas* son:

$$Seno \quad \theta = \frac{Longitud \ \ del \ \ cateto \ \ opuesto \ \ al \ \ ángulo \ \ \theta}{Longitud \ \ de \ \ la \ \ hipotenusa}$$

$$Coseno \quad \theta = \frac{Longitud \ \ del \ \ cateto \ \ adyacente \ \ al \ \ ángulo \ \ \theta}{Longitud \ \ de \ \ la \ \ hipotenusa}$$

$$Tangente \quad \theta = \frac{Longitud \ \ del \ \ cateto \ \ opuesto \ \ al \ \ ángulo \ \ \theta}{Longitud \ \ del \ \ cateto \ \ adyacente \ \ al \ \ ángulo \ \ \theta}$$

$$Cotangente \quad \theta = \frac{Longitud \ \ del \ \ cateto \ \ adyacente \ \ al \ \ ángulo \ \ \theta}{Longitud \ \ del \ \ cateto \ \ opuesto \ \ al \ \ ángulo \ \ \theta}$$

$$Secante \quad \theta = \frac{Longitud \ \ de \ \ la \ \ hipotenusa}{Longitud \ \ del \ \ cateto \ \ adyacente \ \ al \ \ ángulo \ \ \theta}$$

$$Cosecante \quad \theta = \frac{Longitud \ \ de \ \ la \ \ hipotenusa}{Longitud \ \ del \ \ cateto \ \ opuesto \ \ al \ \ ángulo \ \ \theta}$$

Como sabemos la cotangente, la secante y la cosecante son funciones recíprocas respectivamente de la tangente, el coseno y el seno.

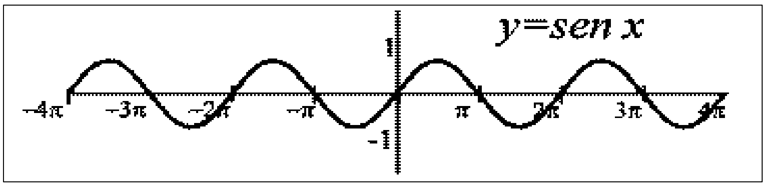
En la naturaleza existe una gran cantidad de sucesos que tienen un comportamiento repetitivo, es decir, un comportamiento periódico, como el de las ondas sonoras, y las funciones trigonométricas son las más adecuadas para describir esos fenómenos.

Recordemos cómo son las gráficas de las funciones trigonométricas básicas.

Función seno: ***y = sen x***

Periodo: 2π
Dominio: Todos los números reales
Rango: [-1,1]
Simétrica con respecto al origen
Continua en todos los reales

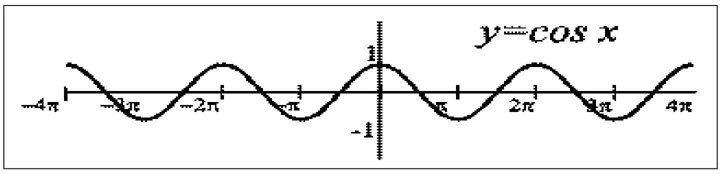
x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
sen x	0	0.5	0.86	1	0.86	0.5	0	-0.5	-0.86	-1	-0.86	-0.5	0



Función coseno: ***y = cos x***

Periodo: 2π
Dominio: Todos los números reales
Rango: [-1,1]
Simétrica con respecto al eje *y*
Continua en todos los reales

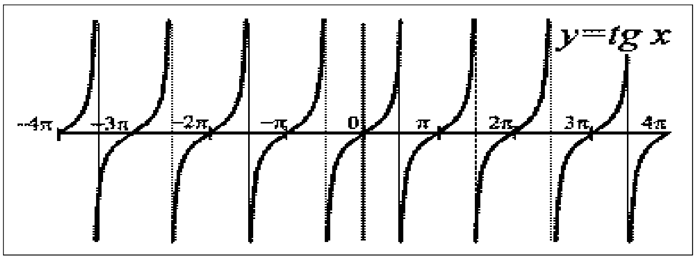
x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
cos x	1	0.86	0.5	0	-0.5	-0.86	-1	-0.86	-0.5	0	0.5	0.86	1



Función tangente: ***y = tan x***

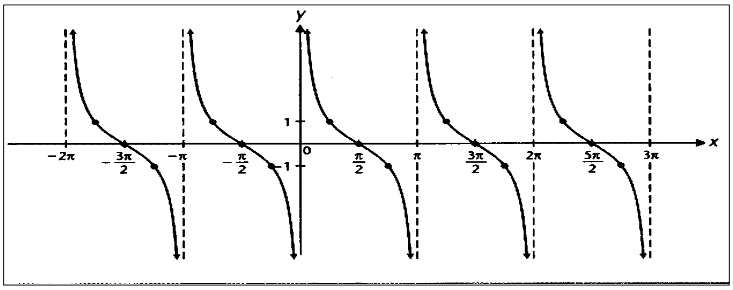
Periodo: π
Dominio: Todos los números reales excepto $\pi/_2 + k\pi$, para todo k que es un número entero
Rango: Todos los números reales
Simétrica con respecto al origen
Creciente entre las asíntotas
Discontinua en $x = \pi/_2 + k\pi$, para k que es un número entero

x	0	$^{\pi}/_6$	$^{\pi}/_3$	$^{\pi}/_2$	$^{2\pi}/_3$	$^{5\pi}/_6$	π	$^{7\pi}/_6$	$^{4\pi}/_3$	$^{3\pi}/_2$	$^{5\pi}/_3$	$^{11\pi}/_6$	2π
$tan\ x$	0	0.6	1.7	$\pm\infty$	-1.7	-0.6	0	0.6	1.7	$\pm\infty$	-1.7	-0.6	0



Función cotangente: ***y = ctg x***
Periodo: π
Dominio: Todos los números reales excepto $k\pi$, para todo k que es un número entero.
Rango: Todos los números reales.
Simétrica con respecto al origen.
Función decreciente entre las asíntotas
Discontinua en $x = k\pi$, para k que es un número entero

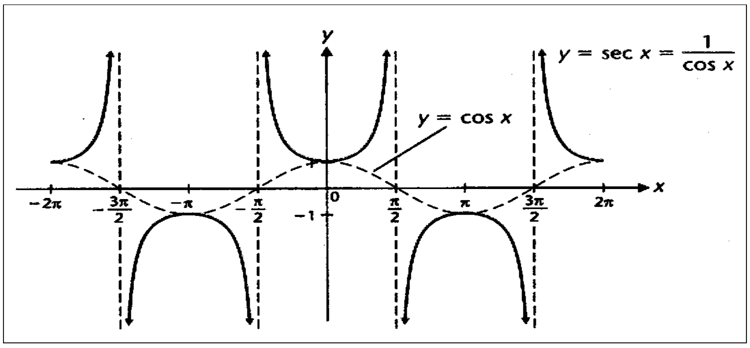
x	0	$^{\pi}/_6$	$^{\pi}/_3$	$^{\pi}/_2$	$^{2\pi}/_3$	$^{5\pi}/_6$	π	$^{7\pi}/_6$	$^{4\pi}/_3$	$^{3\pi}/_2$	$^{5\pi}/_3$	$^{11\pi}/_6$	2π
$cot\ x$	$\pm\infty$	1.7	0.6	0	-0.6	-1.7	∞	1.7	0.6	0	-0.6	-1.7	$\pm\infty$



Función secante: $y = sec\ x$

Periodo: 2π
Dominio: Todos los números reales excepto $\pi/_2 + k\pi$, para todo k que es un número entero
Rango: Todos los números reales y tales que $y \leq -1$ ó $y \geq 1$, es decir: $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$
Simétrica con respecto al eje y
Discontinua en $x = \pi/_2 + k\pi$, para k que es un número entero

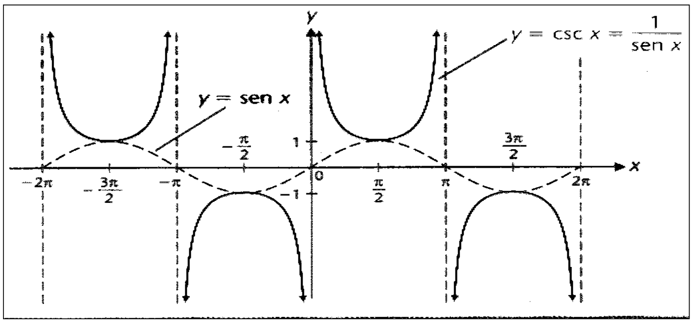
x	0	$\pi/_6$	$\pi/_3$	$\pi/_2$	$2\pi/_3$	$5\pi/_6$	π	$7\pi/_6$	$4\pi/_3$	$3\pi/_2$	$5\pi/_3$	$11\pi/_6$	2π
sec x	1	1.2	2	$\pm\infty$	-2	-1.2	-1	-1.2	-2	$\pm\infty$	2	1.2	1



Función cosecante $y = csc\ x$**.**

Periodo: 2π. Dominio:
Todos los números reales excepto $k\pi$, para todo k que es un número entero.
Rango: Todos los números reales y tales que $y \leq -1$ o $y \geq 1$, es decir: $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$
Simétrica con respecto al origen
Discontinua en $x = k\pi$, para k que es un número entero

x	0	$\pi/_6$	$\pi/_3$	$\pi/_2$	$2\pi/_3$	$5\pi/_6$	π	$7\pi/_6$	$4\pi/_3$	$3\pi/_2$	$5\pi/_3$	$11\pi/_6$	2π
cosec x	$\pm\infty$	2	1.2	1	1.2	2	$\pm\infty$	-2	-1.2	-1	-1.2	-2	$\pm\infty$



Derivadas de funciones trigonométricas

Para derivar funciones trigonométricas, utilizaremos las siguientes fórmulas:

$$\frac{d}{dx} sen\, u = cos\, u \cdot \frac{d}{dx} u \qquad \frac{d}{dx} ctgu = -\csc^2 u \frac{d}{dx} u$$

$$\frac{d}{dx} cos\, u = -sen\, u \frac{d}{dx} u \qquad \frac{d}{dx} sec\, u = sec\, u\, tan\, u \frac{d}{dx} u$$

$$\frac{d}{dx} tan\, u = sec^2 u \frac{d}{dx} u \qquad \frac{d}{dx} csc\, u = -csc\, u\; ctg\, u \frac{d}{dx} u$$

En la bibliografía que se te recomienda, podrás encontrar la forma de como se deducen o se demuestran las fórmulas anteriores

Ejemplos

1.- Para derivar $y = sen 12x^3$

Se elige la fórmula de derivación que se ajusta a la estructura de la regla de correspondencia, en este caso:

$$\frac{d}{dx} sen\, u = cos\, u \cdot \frac{d}{dx} u \qquad \text{donde } u = 12x^3,$$

por lo que:

$$\frac{d}{dx} sen 12x^3 = cos 12x^3 \frac{d}{dx} 12x^3 = cos 12x^3 \cdot 36x^2$$

y se tiene: $\frac{d}{dx} sen 12x^3 = 36x^2 cos 12x^3$

2.- Para derivar $f(x) = ctg(4x - x^2)$

Elegimos la fórmula de derivación que se ajusta:

$$\frac{d}{dx} ctgu = -\csc^2 u \frac{d}{dx} u \qquad \text{con } u = (4x - x^2) \text{, por lo que:}$$

$$\frac{d}{dx} ctg\left(4x - x^2\right) = -\csc^2\left(4x - x^2\right) \frac{d}{dx}\left(4x - x\ \right) = -\csc^2\left(4x - x^2\right)\left(4 - 2x\right)$$

y se obtiene $\frac{d}{dx} ctg\,(4x - x^2) = -(4 - 2x) csc^2\,(4x - x^2)$

Aplicaciones

Ejemplo

La función posición de un objeto que esta sujeto a un resorte, en movimiento armónico simple, es $S = 15\, Cos\, (^{\pi}/_{2}\, t)$

a) Calcula la razón de cambio promedio, es decir la velocidad media de los 2 a los 2.5 segundos.

b) Calcula la razón de cambio instantáneo, es decir, la velocidad instantánea a los 3 segundos.

c) Encuentra los valores de *t* donde la velocidad instantánea es cero.

Solución

a) La razón de cambio promedio se calcula como sigue:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{D(2.5) - D(2)}{2.5 - 2} = \frac{-10.60 - (-15)}{2.5 - 2} = 8.40$$

por lo que el objeto se movía a una velocidad media de 8.40 unidades por segundo de los 2 a los 2.5 segundos

b) La velocidad instantánea es igual a la derivada de la función posición a los *t* segundos

$$S'(t) = -15\,\frac{\pi}{2}\, sen\, (^{\pi}/_{2}\, t) \qquad \text{y} \qquad S'(3) = -\frac{15\pi}{2}\, sen\, (^{\pi}/_{2} \cdot 3) = \frac{15\pi}{2}$$

que se interpreta como: la velocidad instantánea a los 3 segundos es de $\frac{15\pi}{2}$ unidades por segundo.

c) Para encontrar los valores de *t* donde la velocidad instantánea es cero, se iguala la función velocidad a cero:

$$-\frac{15\pi}{2}\, sen\, (^{\pi}/_{2}\, t) = 0$$

$$sen\, (^{\pi}/_{2}\, t) = 0$$

por lo que $t = 0, 2, 4, 6, \ldots,$

y podemos decir que la velocidad instantánea es cero cuando el tiempo *t* es par, es decir el objeto se detiene cada 2 segundos.

Ejercicios 2

I.- Comprueba cada una de las siguientes funciones derivadas:

i. $y = e^{sen 3x}$ $\qquad$ $y' = 3\cos 3x\, e^{sen 3x}$

ii. $y = sen 3x + \cos 2x$ $\qquad$ $\dfrac{dy}{dx} = 3\cos 3x - 2 sen 2x$

iii. $f(x) = \tan^2 x$ $\qquad$ $f'(x) = 2\tan x \sec^2 x$

iv. $s = sen\, t - t\cos t + t^2 + 4t + 3$ $\qquad$ $\dfrac{ds}{dt} = t\, sen\, t + 2t + 4$

v. $y = \sqrt{sen\, x}$ $\qquad$ $y' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{sen\, x}}$

vi. $f(\theta) = sen \dfrac{2}{\theta}$ $\qquad$ $f'(\theta) = \dfrac{-2\cos \dfrac{2}{\theta}}{\theta^2}$

vii. $f(x) = \cos(1 - x^2)$ $\qquad$ $f(´x) = 2x\, sen(1 - x^2)$

viii. $f(x) = \cos(1 - x)^2$ $\qquad$ $f'(x) = 2(1 - x) sen(1 - x)^2$

ix. $s = sen^2(3t - 2)$ $\qquad$ $s' = 6 sen(3t - 2)\cos(3t - 2)$

x. $\gamma = \theta \cos \theta$ $\qquad$ $\gamma' = \cos\theta - \theta sen\theta$

II.- Realiza las operaciones convenientes e indica la opción de la respuesta correcta

1. La función derivada de $f(x) = \mathrm{sen}(x^2 - \pi)$, es: ( )

A) $f^{'}(x) = \cos(x^2 - \pi)$
B) $f^{'}(x) = \cos(x^2)$
C) $f^{'}(x) = \pi\cos(x^2 - \pi)$
D) $f^{'}(x) = 2x\cos(x^2 - \pi)$
E) $f^{'}(x) = x^2\cos(x^2 - \pi)$

2. La función derivada de $f(x) = \cos(4x^2 - 5)$, es: ( )

A) $f^{'}(x) = sen(4x^2 - 5)$
B) $f^{'}(x) = -sen(8x)$
C) $f^{'}(x) = -sen(4x^2 - 5)$
D) $f^{'}(x) = 8x\cos(4x^2 - 5)$
E) $f^{'}(x) = -8xsen(4x^2 - 5)$

3. La función derivada de $f(x) = \tan(7 - x^2)$, es: ( )

A) $f^{'}(x) = \sec^2(7 - x^2)$
B) $f^{'}(x) = 2x\sec^2(7 - x^2)$
C) $f^{'}(x) = -2x\sec^2(7 - x^2)$
D) $f^{'}(x) = (7 - 2x)\sec^2(7 - x^2)$
E) $f^{'}(x) = -(7 - 2x)\sec^2(7 - x^2)$

4. La función derivada de $f(x) = \mathrm{c}\,tg(x - 3x^2)$, es: ( )

A) $f^{'}(x) = \csc^2(x - 3x^2)$
B) $f^{'}(x) = -\csc^2(x - 3x^2)$
C) $f^{'}(x) = (1 - 6x)\csc^2(x - 3x^2)$
D) $f^{'}(x) = -(1 - 6x)\csc^2(x - 3x^2)$
E) $f^{'}(x) = -6x)\csc^2(x - 3x^2)$

5. La función derivada de $f(\theta)=\sec\theta^3$, es: ( )

A) $f^{'}(\theta)=\sec\theta^3\tan\theta^3$

B) $f^{'}(\theta)=\tan^2\theta^3$

C) $f^{'}(\theta)=3\theta^2\sec\theta^3\tan\theta^3$

D) $f^{'}(\theta)=3\theta^2\tan^2\theta^3$

E) $f^{'}(\theta)=-3\theta^2\sec\theta^3\tan\theta^3$

6. La función derivada de $f(x)=\cos ec(-2x)$, es: ( )

A) $f^{'}(x)=2\csc(-2x)\cot(-2x)$

B) $f^{'}(x)=2x\csc(-2x)\cot(-2x)$

C) $f^{'}(x)=-2x\csc(-2x)\cot(-2x)$

D) $f^{'}(x)=-\csc(-2x)\cot(-2x)$

E) $f^{'}(x)=-2\csc(-2x)\cot(-2x)$

7. La función derivada de $f(x)=\dfrac{1}{\cos 2x}$, es: ( )

A) $f^{'}(x)=\dfrac{2}{sen2x}$

B) $f^{'}(x)=2sen2x$

C) $f^{'}(x)=-\dfrac{2sen2x}{\cos 2x}$

D) $f^{'}(x)=-2sen2x$

E) $f^{'}(x)=\dfrac{2sen2x}{\cos^2 2x}$

8. La función derivada de $f(x)=sen^3(x^2+7)$, es: ( )

A) $f^{'}(x)=3\cos^2(x^2-7)$

B) $f^{'}(x)=3sen^2(x^2-7)$

C) $f^{'}(x)=2xsen^2(x^2+7)\cos(x^2+7)$

D) $f^{'}(x)=3xsen^2(x^2+7)\cos(x^2+7)$

E) $f^{'}(x)=6xsen^2(x^2+7)\cos(x^2+7)$

9. La función derivada de $f(x)=e^{\cos x}$, es: ( )

A) $f^{'}(x)=\cos xe^{\cos x}$

B) $f^{'}(x)=e^{-senx}$

C) $f^{'}(x)=senxe^{\cos x}$

D) $f^{'}(x)=e^{\cos x}$

E) $f^{'}(x)=-senx\,e^{\cos x}$

III.- Encuentra la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

i. $y = sen\sqrt{x^2 - x}$

ii. $y = \cos(2\pi - x)$

iii. $y = sen^2(3x - \pi)$

iv. $f(x) = \tan\dfrac{4}{x-3}$

v. $s = \sec\dfrac{t^2}{5-2t}$

vi. $f(x) = cosec(x^3 - x^2)$

vii. $y = \dfrac{sen(3x-5)}{\cos x^2}$

viii. $s = \dfrac{4t}{\cos(t^2 + \pi^2)}$

ix. $y = sen(\pi x - 2)\,tan(\pi x - 2)$

x. $f(x) = \dfrac{1}{\tan(4 - 7x^2)}$

IV.- Aplicaciones

1.- La temperatura en la Ciudad de México durante dos días de primavera está dada por la función T(*t*) = -10 Sen ($^{\pi t}/_{12}$) + 15 con *t* medido en horas y T medida en grados Celsius

a) Elabora una tabla de la temperatura, considerando valores de 0 a 48, cada tres horas

b) Traza la grafica de la función temperatura

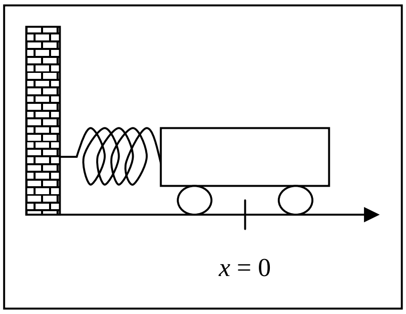
c) ¿En que intervalos de tiempo la temperatura está bajando y en cuáles está subiendo?

d) Calcula la razón instantánea de cambio de la temperatura a las 3, 6, 9, y 12 horas.

e) Encuentra y grafica la función razón de cambio instantánea de la temperatura

f) ¿A qué hora del día se incrementa más rápido la temperatura?

2.- Un carrito se encuentra unido a la pared, por medio de un resorte. El resorte se comprime hasta una distancia de 20 cm. de la posición de equilibrio $x = 0$, y en el instante t = 0 se suelta. En una situación ideal (sin fricción) el carrito oscilará entre las posiciones $x = -20$ y $x = 20$. El carrito tarda 8 segundos en regresar a su posición inicial



a) Elabora una tabla de las posiciones que toma el carrito en los primeros 8 segundos

b) Traza la grafica de la función posición

c) Calcula la razón de cambio promedio de la posición a los *t* segundos de los 3 a los 4 segundos, y de los 5 a los 6 segundos Interpreta tus resultados

d) ¿Cuál será la velocidad instantánea del carrito a los 4 segundos?

e) ¿En qué momento estará moviéndose más rápido el carrito?

Soluciones a los ejercicios de la unidad 1

Ejercicios 1

II.

1. B
2. B
3. B
4. E
5. C
6. E

III.

i) $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}$

ii) $y' = -\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}$

iii) $f'(t) = -\frac{2t}{(t+1)\ln(10)}$

iv) $s' = \frac{12t^2 - 10t + 2}{4t^3 - 5t^2 + 2t}$

v) $y' = (21x^2)\ln(12)(12^{7x^3})$

vi) $f'(x) = 5e^{3x}(1+3x)$

vii) $f'(x) = 9e^{3x+e}$

viii) $y' = \frac{e^x - 3}{(e^x - 3x)\ln(x)}$

IV. a) 6.7 millones de metros cúbicos

b) $M'(20) = 0.0727$, es decir, 72.72 metros cúbicos por hectárea.

Ejercicios 2

II

1) D
2) E
3) C
4) D
5) C

6) A
7) E
8) B
9) E

III

i. $y' = \dfrac{(2x-1)\cos\sqrt{x^2-x}}{2\sqrt{x^2-x}}$

ii. $y' = sen(2\pi - x)$

iii. $y' = 6sen(3x-\pi)\cos(3x-\pi)$

iv. $f'(x) = \dfrac{-4}{(x-3)^2}\sec^2\left(\dfrac{4}{x-3}\right)$

v. $s' = \dfrac{10t-2t^2}{(5-2t)^2}\sec\left(\dfrac{t^2}{5-2t}\right)\tan\left(\dfrac{t^2}{5-2t}\right)$

vi. $-\left(3x^2-2x\right)\csc\left(x^3-x^2\right)ctg\left(x^3-x^2\right)$

vii. $y' = \dfrac{3\cos(3x-5)\cos\left(x^2\right)+2x\,sen\left(x^2\right)}{\cos^2\left(x^2\right)}$

viii. $s' = \dfrac{4\cos\left(t^2+\pi^2\right)+8t^2 sen\left(t^2+\pi^2\right)}{\cos^2\left(t^2+\pi^2\right)}$

ix. $y' = \pi\, sen(\pi x-2)\left(1+\sec^2(\pi x-2)\right)$

x. $f'(x) = \dfrac{14x\sec^2\left(4-7x^2\right)}{\tan^2\left(4-7x^2\right)}$

UNIDAD 2. La integral como antiderivada

Propósitos:

Introducir el concepto de integral indefinida, a partir de analizar situaciones de variación en las que solo se conoce su razón de cambio e inducir las primeras formulas para aplicarlas junto con los dos métodos de integración

Aprendizajes a lograr por los educandos en la unidad:

- Explora a través de tablas gráficas o análisis del comportamiento de la variación, situaciones o problemas cuya solución lleva a encontrar la antiderivada de una función constante o lineal.
- Establece la relación funcional que permite resolver el problema.
- Encuentra la función cuya derivada es de la forma $f(x) = c$ ó $f(x) = ax + b$
- Utiliza la condición inicial del problema para encontrar la solución particular.
- Identifica que al modificarse la condición inicial, las funciones encontradas difieren en una constante.
- Explica el significado de condición inicial y antiderivada.
- Conoce la relación que existe entre la antiderivada y la integral indefinida. Maneja la notación respectiva.
- Induce la fórmula de $\int ax^n dx$
- Utiliza una tabla de integrales inmediatas que incluya funciones trigonométricas y exponenciales.
- Avanza en el reconocimiento de estructuras al identificar la fórmula de la integral inmediata que requiere utilizar para obtener una integral dada.
- Identifica las transformaciones algebraicas pertinentes para convertir una integral a una forma inmediata.
- Mejora su desempeño algebraico, a través de la resolución de ejercicios de integración.
- Reconoce que el método de integración por partes amplía las posibilidades de integrar productos de funciones y sabe que se desprende de la derivada de un producto.
- Utiliza el método de integración por partes.

Estrategias de Aprendizaje

- Reconoce las características de la integral indefinida
- Procede a resolver problemas con las formulas de integración.
- Reconoce la importancia de los diferentes métodos de integración. como el elemento clave en la resolución de problemas.
- Adquiere la habilidad en las técnicas de integración para la resolución de problemas que involucran integrales indefinidas

Actividades de aprendizaje

La Integral como Antiderivada

Durante el manejo de las matemáticas hemos encontrado que existen operaciones inversas, tales como la adición y la sustracción, la multiplicación y la división, la potenciación y la radicación. En cálculo diferencial determinamos la función derivada *f'(x)* de una función *f(x)*, ahora nos ocuparemos del proceso inverso, es decir, dada la función derivada $f'(x)$ obtendremos la función *f(x).*

Una función *F*, es llamada *Antiderivada* o Primitiva de una función *f*, en un intervalo *I*, si $F'(x) = f(x)$ para todo valor de x en el intervalo.

Ejemplo:

La función derivada de $F(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$

La función derivada de $F(x) = x^2 + 5$ es $f'(x) = 2x$

La función derivada de $F(x) = x^2 - 9$ es $f'(x) = 2x$

La función derivada de $F(x) = x^2 + \frac{2}{3}$ es $f'(x) = 2x$

La función derivada de $F(x) = x^2 + c$ es $f'(x) = 2x$

Como observamos, la antiderivada o primitiva de la función $f(x) = 2x$ es el conjunto de funciones $f(x) = x^2 + c$, a la cual denominaremos *integral indefinida* y la expresaremos como:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Al proceso de obtener la función antiderivada o primitiva de una función se le llama Integración y a *c*, se le llama *constante de integración.*
A la expresión *dx* se le llama *diferencial* de *x*

La *diferencial de una función* es el producto de la función derivada por la diferencial de su variable independiente, así:

Dada la función $y = f(x)$, se tiene que $dy = f'(x)dx$

Como describimos renglones arriba, la antiderivación o integración es el proceso inverso a la derivación, y podemos relacionar las principales formulas de integración con las respectivas fórmulas de derivación.

Fórmulas de integración

$$\int du = u + C$$
$$\int cdu = c\int du$$
$$\int du + dv - dw = \int du + \int dv - \int dw$$
$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{si } n \neq -1$$
$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$
$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$
$$\int e^u du = e^u + C$$
$$\int \ln u du = u(\ln u - 1) + C$$
$$\int senu du = -\cos u + C$$
$$\int \cos u du = senu + C$$
$$\int \tan u du = \ln|\sec u| + C = -\ln|\cos u| + C$$
$$\int \cot u du = \ln|senu| + C$$
$$\int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$
$$\int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$
$$\int \sec^2 u du = \tan u + C$$
$$\int \csc^2 u du = -\cot u + C$$
$$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$$
$$\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

Para obtener la integral de una función, es necesario que se ajuste a alguna de las fórmulas presentadas anteriormente, aunque en algunos casos será necesario realizar algunas transformaciones o aplicar alguna *propiedad de las integrales,* las cuales encontrarás fácilmente en la bibliografía sugerida.

Ejemplo

Para calcular $\int (3x^4 - 5x^3 + 2x - 8)dx$, inicialmente, se observa que corresponde a la integral de una suma de funciones, la cual se descompondrá en la suma de integrales:

$$\int (3x^4 - 5x^3 + 2x - 8)dx = \int 3x^4 dx - \int 5x^3 dx + \int 2x dx - \int 8dx$$

y en cada una de estas integrales existe la multiplicación de una constante por una diferencial, lo cual se transforma en el producto de la constante por la integral correspondiente, así:

$$\int 3x^4dx - \int 5x^3dx + \int 2xdx - \int 8dx = 3\int x^4dx - 5\int x^3dx + 2\int xdx - 8\int dx$$

en esta última expresión, se puede utilizar la fórmula de integración de una potencia ya que cada una de las integrales se ajusta al modelo presentado en dicha fórmula:

$$3\int x^4dx - 5\int x^3dx + 2\int xdx - 8\int dx = 3\frac{x^{4+1}}{4+1} - 5\frac{x^{3+1}}{3+1} + 2\frac{x^{1+1}}{1+1} - 8x + c$$

y al simplificar obtenemos:

$$\int (3x^4 - 5x^3 + 2x - 8)dx = \frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + x^2 - 8x + c$$

Ejercicios 1

I.- Encuentra la antiderivada de las funciones dadas.

i. $f(x) = 9x^2 - 4x + 3$

ii. $f(x) = 2x^{\frac{5}{4}} + 6x^{\frac{1}{4}} + 3x^{-4}$

iii. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7$

iv. $f(x) = 3x^5 - x^{\frac{5}{3}}$

v. $f(x) = 10x^4 - 6x^3 - 7x + 5$

vi. $f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{6} + 7$

vii. $f(x) = \frac{1}{x^5} - \frac{3}{x^2}$

viii. $f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

ix. $f(x) = \frac{4}{x^7} - \frac{7}{x^4} + x$

x. $f(x) = \sqrt{x^3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 5$

II.- Comprueba cada una de las siguientes integrales:

i. $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + c$

ii. $\int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 5)dx = x^4 + x^3 + x^2 + 5x + c$

iii. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$

iv. $\int (3 - 2x - x^4)dx = 3x - x^2 - \frac{x^5}{5} + c$

v. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

vi. $\int (1 - x^3)^2 dx = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + c$

vii. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + c$

viii. $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c$

ix. $\int (x^2 - 1)^2 dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x + c$

x. $\int (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx = ax - \frac{4}{3}x\sqrt{ax} + \frac{x^2}{2} + c$

III.- Aplica las fórmulas de integración adecuadas, realiza las operaciones y escribe la opción de la respuesta correcta

1.- $\int (3x^5 - 7x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x + 9)dx$ es ( )

A) $15x^4 - 28x^3 - 3x^2 + 10x - 2 + 9 + c$

B) $\frac{1}{2}x^6 - \frac{7}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - x^2 + c$

C) $\frac{1}{2}x^6 - \frac{7}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 9x + c$

D) $15x^4 - 28x^3 - 3x^2 + 10x - 2 + c$

E) $15x^4 - 28x^3 - 3x^2 + 10x + c$

2.- $\int \frac{x^3}{5}dx$ es ( )

A) $\frac{x^4}{5}+c$

B) $\frac{5x^4}{4}+c$

C) $\frac{x^4}{20}+c$

D) $\frac{3x^4}{5}+c$

E) $\frac{3x^4}{20}+c$

3.- $\int \frac{7}{x^5}dx$ es ( )

A) $-\frac{7}{x^6}+c$

B) $-42x^6+c$

C) $-\frac{7}{6x^6}+c$

D) $-28x^4+c$

E) $-\frac{7}{4x^4}+c$

4.- $\int \frac{2dx}{x}$ es ( )

A) $\frac{x^2}{2}+c$

B) ln x +c

C) $\frac{2}{x^2}+c$

D) x^2+c

E) 2 ln x + c

5.- $\int (x^2+1)x dx$ es ( )

A) $(x^2+1)^2+c$

B) $2(x^2+1)^2+c$

C) $\frac{1}{2}(x^2+1)^2+c$

D) $\frac{1}{4}(x^2+1)^2+c$

E) $4(x^2+1)^2+c$

Métodos de integración

Existen muchos casos en que el proceso de integración no se realiza mediante cálculos directos, sino que es necesario efectuar algunas transformaciones. A estas transformaciones se les conoce generalmente como *Métodos de integración,* entre los cuales están la integración por sustitución, integración por partes, por sustitución trigonométrica, por descomposición en fracciones parciales, etc.

Revisa en la bibliografía sugerida como se lleva a cabo cada uno de estos procesos.

Integración por Sustitución

Ejemplo

Determinar $\int xe^{x^2}dx$

Solución:

Esta integral puede ajustarse a la forma $\int e^u du.$ tomando $u = x^2$ y obteniendo $du = 2x\ dx$

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2xdx)$$

$$= \frac{1}{2}\int e^u du \text{ , donde u = } x^2$$

$$= \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$

Integración por partes

Evaluar $\int xLn\,x\,dx$

Solución: Como la integral no se ajusta a una forma familiar, intentaremos la integración por partes. Sea $u = x$ y $dv = Ln\,x\,dx$, entonces $du = dx$, pero $v = \int Ln\ x\ dx$ no es evidente por inspección. Sí cambiamos la selección por: $u = Ln\,x$ y $dv = x\,dx$, entonces $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$

Así, $$\int x\ Ln\ x\ dx = (Ln\ x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x}\ dx$$
$$= (Ln\ x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2}{x}\right)\ dx$$
$$= \frac{x^2 Ln\,x}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}\left(Ln\ x - \frac{1}{2}\right)$$

Aplicación del método de Integración por partes dos veces.

Calcular $\int x^2 e^{2x+1}dx.$

Solución: Sea $u = x^2$ y $dv = e^{2x+1}\,dx$, entonces $du = 2x\,dx$ y $v = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

$$\int x^2 e^{2x+1}dx = \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2}(2xdx)$$
$$= \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \int xe^{2x+1}dx$$

Para encontrar $\int xe^{2z+1}dx$, usaremos de nuevo la integración por partes.

Aquí, sea $u = x$ y $dv = e^{2x+1}\ dx$, entonces $du = dx$ y $v = \frac{1}{2}\ e^{2x+1}$

$$\int xe^{2x+1}dx = \frac{xe^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2}dx$$
$$= \frac{xe^{2x+1}}{2} - \frac{e^{2x+1}}{4} + C$$

Así, $$\int x^2 e^{2x+1}dx = \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \frac{xe^{2x+1}}{2} + \frac{e^{2x+1}}{4} + C$$
$$= \frac{e^{2x+1}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C.$$

Ejercicios 2

I.- Comprueba cada una de las siguientes integrales:

b) Integración por sustitución

i. $\int \frac{\cos x}{sen^3 x} dx = \frac{-1}{2sen^2 x} + c$

ii. $\int \frac{4x+2}{x^2+x-3} dx = 2\,Ln\left|x^2+x-3\right| + c$

iii. $\int \frac{dx}{(x-1)^3} = -\frac{1}{2(x-1)^2} + c$

iv. $\int e^{4x+5} dx = \frac{1}{4} e^{4x+5} + c$

v. $\int (x^2-7)\sqrt{x^3-21x}\, dx = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3-21x)^3} + C$

vi. $\int \sec^2(1-\frac{x}{5})dx = -5\tan(1-\frac{x}{5}) + c$

vii. $\int \frac{4x^2 dx}{\sqrt{x^3+8}} = \frac{8\sqrt{x^3+8}}{3} + c$

viii. $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} = -\frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{x})^3}{3} + c$

b) Integración por partes:

i. $\int x\, sen\, x\, dx = sen\, x - x\cos x + c$

ii. $\int \ln x\, dx = x\ln x - x + c$

iii. $\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(sen\, x + \cos x) + c$

iv. $\int x^2\sqrt{1-x}\, dx = -\frac{2}{105}\sqrt{(1-x)^3}(15x^2+12x+5) + c$

v. $\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}(sen\, x\, tan\, x + \ln(sec\, x + tan\, x) + c$

vi. $\int x\, cos\, nx\, dx = \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x\, sen\, nx}{n} + c$

vii. $\int a\, sec^2 a\, da = a\, tan\, a + \ln\left|cos\, a\right| + c$

II.- Realiza las operaciones convenientes, aplica los métodos de integración adecuados y señala la opción de la respuesta correcta.

1) $\int \sqrt{3-x}dx$ = ( )

A) $\frac{2}{3}\sqrt{(3-x)^3} + c$

B) $-\frac{2}{3}\sqrt{(3-x)^3} + c$

C) $\frac{3}{2}\sqrt{(3-x)^3} + c$

D) $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{(3-x)^2} + c$

E) $-\frac{3}{2}\sqrt{(3-x)^3} + c$

2) $\int (x^2 - x)^3 (2x-1)dx =$ ( )

A) $\frac{(x^2 - x)^2}{2} + c$

B) $2(3x^2 - 5x)^2 6x + c$

C) $\frac{(x^2 - x)^4}{4}(2x-1) + c$

D) $4(3x^2 - 5x)^3 6x + c$

E) $\frac{(x^2 - x)^4}{4} + c$

3) $\int \frac{9xdx}{(2-x^2)^3}$ ( )

A) $\frac{9}{8(2-x^2)^4}+c$

B) $\frac{9}{4(2-x^2)^2}+c$

C) $-\frac{9}{4(2-x^2)^2}+c$

D) $\frac{9}{2(2-x^2)^2}+c$

E) $-\frac{9}{8(2-x^2)^4}+c$

4) $\int sen(4x-3)dx$ ( )

A) $-\frac{1}{4}\cos(4x-3)+c$

B) $-4\cos(4x-3)+c$

C) $4sen(4x-3)+c$

D) $\frac{1}{4}\cos(4x-3)+c$

E) $-\frac{1}{4}sen(4x-3)+c$

5) $\int x(2x+1)^2 dx$ ( )

A) $(2x+1)^2+c$

B) $2(3x^2-5x)^2 6x+c$

C) $x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+c$

D) $4(3x^2-5x)^3 6x+c$

E) $x(x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{2})+c$

6) $\int x\sec^2(5-3x^2)dx$ ( )

A) $-\frac{1}{6}\tan(5-3x^2)+c$

B) $6\tan(5-3x^2)+c$

C) $-6\tan(5-3x^2)+c$

D) $\frac{1}{6}\tan(5-3x^2)+c$

E) $-\frac{1}{6}\sec(5-3x^2)+c$

Soluciones a los ejercicios

Ejercicios 1

I.

i. $F(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x + c$

ii. $F(x) = \frac{8x^{9/4}}{9} + \frac{24x^{5/4}}{5} - x^{-3} + c$

iii. $F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 7x + c$

iv. $F(x) = \frac{x^6}{2} - \frac{3x^{8/3}}{8}$

v. $F(x) = 2x^5 - \frac{3x^4}{2} - \frac{7x^2}{2} + 5x + c$

vi. $F(x) = \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} - \frac{\sqrt[3]{x^4}}{8} + 7x + c$

vii. $F(x) = \frac{-1}{4x^4} + \frac{3}{x}$

viii. $F(x) = 2\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c$

ix. $F(x) = -\dfrac{2}{3x^6} + \dfrac{7}{3x^3} + \dfrac{x^2}{2} + c$

x. $F(x) = \dfrac{2\sqrt{x^5}}{5} + \dfrac{1}{2x} + 5x + c$

III

1) B
2) C
3) C
4) E
5) D

Ejercicios 2

II.

1) B
2) E
3) D
4) A
5) C
6) A

UNIDAD 3. La integral definida.

Propósitos:

- Introducir el concepto de integral definida como una función-área para construir su significado
- Comprender la relación entre la derivada y la integral que se sintetiza en el teorema fundamental del cálculo.

Aprendizajes a lograr por los educandos en la unidad:

- Asocia el área bajo una curva con la solución a una situación dada.
- Calcula el área bajo la gráfica de funciones constantes y lineales, auxiliándose de la figura geométrica respectiva.
- Obtiene la función-área, que proporciona el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma [0, x], [0, a], [a, b]
- Relaciona la antiderivada de una función con la función área asociada.
- Interpreta el área bajo una curva de la forma $f(x) = x^n$.
- Reconoce a la aproximación numérica como un método general para calcular el área bajo una curva.
- Asocia el método de aproximación numérica para calcular un área con un proceso infinito.
- Analiza el comportamiento del proceso infinito asociado a la aproximación numérica para conocer si tiene un valor límite y cuál es éste.
- Aproxima el área bajo una curva utilizando sumas de áreas.
- Valora las ventajas de la existencia de una antiderivada para encontrar la integral definida.
- Comprende la interrelación que se establece en el Teorema Fundamental del Cálculo.
- Aplica el Teorema Fundamental del Cálculo.
- Calcula el área entre dos curvas.

Estrategias de aprendizajes

- Reconoce el significado de la antiderivada en la resolución de problemas.
- Identifica la interrelación del Teorema Fundamental del Cálculo en los diversos problemas de aplicaciones.
- Procede a resolver problemas de las integrales definidas con los métodos de integración de las integrales indefinidas.
- Identifica los elementos y las relaciones que intervienen en el problema.
- Reconoce la importancia del Teorema fundamental del Cálculo.

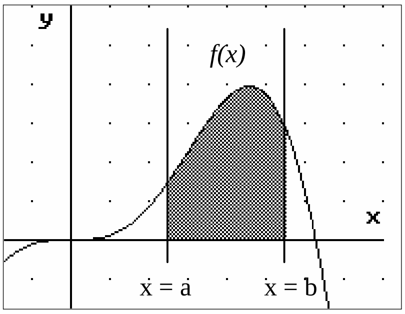
Actividades de aprendizaje

La integral definida se interpreta geométricamente como el área bajo la curva de la función.

Problema:

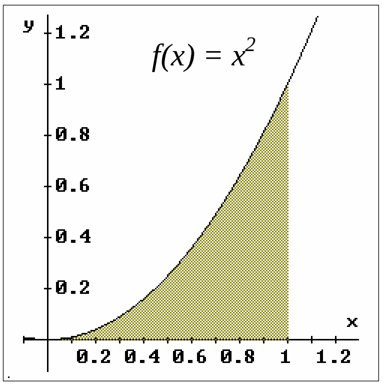
Calcular el área bajo la gráfica de *f(x)*, por arriba del eje *X* y entre las rectas *x = a* y *x = b*

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



Ejemplo:

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2$, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y el eje de las abscisas:



Solución:

$$Area = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} u^2$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea *f(x)* una función definida en un intervalo cerrado [a, b], entonces la **integral definida** de *f(x)* desde *a* hasta *b*, se denota como $\int_a^b f(x)dx$, y se define como:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

en donde, *a* y *b* se llaman límites de integración (*b* superior y *a* inferior), y F(*x*) es la primitiva.

Ejemplos

1. La integral definida $\int_{-3}^{1} (x^2 - 1)dx$, se obtiene:

Inicialmente integrando, es decir:

$$\int_{-3}^{1} (x^2 - 1)dx = \frac{x^3}{3} - x \quad \Big|_{3}^{1}$$

Enseguida se evalúa la primitiva, primero en el límite superior y se resta su evaluación en el límite inferior, como sigue:

$$\int_{-3}^{1} (x^2 - 1)dx = \frac{x^3}{3} - x \Bigg|_{-3}^{1} = \frac{1^3}{3} - 1 - \left(\frac{(-3)^3}{3} - 3\right) = \frac{1}{3} - 1 - \left(\frac{-27}{3} - 3\right) = \frac{1}{3} - 1 + 9 + 3 = \frac{34}{3}$$

2. La integral definida de $\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} \cos x\, dx$, se obtiene integrando, evaluando y sustrayendo el valor obtenido de la evaluación en el límite superior (2π) menos la evaluación en el límite inferior ($^{\pi}/_{3}$), lo que queda:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} \cos x\, dx = senx \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} = sen(2\pi) - sen(\frac{\pi}{3}) = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866$$

Ejercicios 1

Comprueba cada una de las siguientes integrales definidas:

i. $\int_{-1}^{1}(2x^2 - x^3)dx = \frac{4}{3}$

ii. $\int(1-y)\sqrt{y}dy = -\frac{116}{5}$

iii. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x\, dx = \frac{\sqrt{3}}{4}$

iv. $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\, dx = \frac{1}{2}$

v. $\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx = \frac{10}{9}$

vi. $\int_{-2}^{3} e^{-\frac{x}{2}}dx = 2e - \frac{2}{\sqrt{e^e}} \approx 4.9904$

vii. $\int_{0}^{8}\sqrt[3]{y}dy = 12$

viii. $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$

ix. $\int_{0}^{1} x\, sen\, x^2 dx = \frac{1}{2} - \frac{cos 1}{2}$

x. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{sen\, x} = \ln\sqrt{3}$

xi. $\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

xii. $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$

xiii. $\int_{-1}^{0}\frac{da}{(1-a)^2} = \frac{1}{2}$

xiv. $\int_{1}^{e}\ln x\, dx = 1$

xv. $\int_{0}^{2\pi} sen\frac{y}{2}dy = 4$

Aplicaciones de la Integral

Al igual que la derivada de una función tiene una gran cantidad de aplicaciones, dentro y fuera de las matemáticas, la integral también las tiene, a continuación mostraremos algunas aplicaciones sencillas.

Ejemplo 1
Una partícula se mueve a lo largo de una recta, de modo que su velocidad es $v(t) = t^2 - t + 6$, donde t es el tiempo medido en segundos y la velocidad esta medida en metros por segundo

a) Calcula la distancia recorrida entre los segundos $t = 1$ y $t = 3$

Solución

Recordemos que la velocidad es la razón de cambio de la posición, es decir, su derivada, por lo que tenemos: $s(t) = \int_1^3 t^2 - t + 6dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 6t + c$

La distancia recorrida entre los segundos $t = 1$ y $t = 3$ queda determinada por:

$$d = \int_1^3 t^2 - t + 6dt = \left.\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 6t + c\right|_1^3$$

$$= \frac{45}{2} - \frac{35}{6} = \frac{50}{3} = 16.66$$

Así, la partícula recorrió una distancia de 16.66 metros

Ejemplo 2
Una población P(t) de animales aumenta con una rapidez anual dada por $R(t) = 200 + 50\,t$, donde t está medido en años

a) Calcula cuánto aumenta la población entre los años tercero y noveno

Solución

Recordemos que la rapidez de cambio es la derivada de la función población, por lo tanto:

$$P(t) = \int 200 + 50t\ dt = 200\,t + 25\,t^2 + c$$

La población aumenta entre los años $t = 3$ y $t = 9$, tanto como:

$$p = \int_3^9 200 + 50t\ dt = \left. 200t + 25t^2 + c\right|_3^9$$

$$= 3825 - 825$$

$$= 3000$$

De modo que, la población aumentó en 3000 animales en esos años.

Ejercicios 2

I. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que su aceleración es *a(t)* = *t* + 5 y su velocidad inicial es *v*(0) = 4, con *t* medido en segundos y la velocidad medida en metros por segundo.

a. Encuentra la función velocidad de la partícula
b. Calcula la distancia recorrida durante el tiempo de $t = 0$ a $t = 8$ seg.

II. Comprobar el valor del área de cada región limitada como se indica:

i. $y = x^2$, $x = 1$, $x = 3$ y el eje de las abscisas $\quad Área = \frac{27}{3}u^2$

ii. $f(x) = 4x - x^2$, y el eje de las abscisas $\quad Área = \frac{32}{3}u^2$

iii. $y = x^2 - 7x + 6$, $x = 2$, $x = 6$ y el eje de las abscisas $\quad Área = \frac{56}{3}u^2$

iv. $f(x) = 6x - x^2$ y $f(x) = x^2 - 2x$ $\quad Área = \frac{64}{3}u^2$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicios 2

I.

a. $v(t) = \frac{t^2}{2} + 5t + 4$

b. 277.33m.

UNIDAD 4. Modelos y predicción.

PROPÓSITOS:

- Culminar el estudio de la derivada y la integral con la construcción de un modelo que las involucra relacionado con situaciones de diversos contextos.
- Utilizar el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de las situaciones estudiadas.

APRENDIZAJES A LOGRAR POR LOS EDUCANDOS EN LA UNIDAD

El alumno:

- Explora en forma numérica, gráfica o algebraica, las condiciones de una situación dada.
- Reconoce que el comportamiento de la rapidez de cambio asociada a la situación, se puede modelar a través del esquema:

$$\frac{dF}{dt} = kF$$

- Reconoce que para obtener la función que modela el problema tiene que recurrir a la integral para obtener una antiderivada.
- Conoce el método de separación de variables para resolver la ecuación $\frac{dF}{dt} = kF$, y lo aplica en algunos ejemplos.
- Toma en cuenta las condiciones iniciales para obtener la solución particular que representa a la situación, y llega a un modelo del tipo $F(t) = F_0 e^{kt}$
- Utiliza el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de la situación.
- Distingue la diferencia en el comportamiento del modelo $F(t) = F_0 e^{kt}$ dependiendo del signo de k y lo que esto significa en las situaciones modeladas.
- Aprecia la importancia del modelo $P(t) = P_0 e^{kt}$ al saber que se aplica en situaciones de índole diversa.

Estrategias de aprendizaje.

- Ejercita las técnicas de derivación e integración en modelos que relacionan ambos conceptos. Es decir adquiere destreza en la aplicación de los conceptos fundamentales del cálculo.
- Reconoce de manera fehaciente la relación inversa entre derivada e integral en la práctica de resolución de problemas.

Actividades de aprendizaje

Ejemplo 1. **Desintegración radiactiva**.

Una sustancia decrece o decae con una rapidez proporcional a la cantidad de la sustancia presente al tiempo *t*, es decir, $\frac{dR}{dt} = kR(t)$.
Se llama semivida ó vida media al tiempo que debe transcurrir para que la cantidad de sustancia sea la mitad de lo que era originalmente.

El radio tiene una semivida radiactiva de 1620 años aproximadamente. Si originalmente se tienen R_0 gr. ¿Qué porcentaje de una muestra queda tras 100 años?

Solución

Para responder tendríamos que calcular el valor de $R(100)$, a partir de saber que $\frac{dR}{dt} = kR(t)$, $R(0) = R_0$ y $R(1620) = R_0 / 2$

Analicemos la situación:

La razón de cambio es proporcional a la función $\frac{dR}{dt} = kR(t)$

Separando variables tenemos: $\frac{dR}{R(t)} = k\,dt$ y $\int \frac{dR}{R(t)} = k\int dt$

Como $R(t)$ es una cantidad positiva, tenemos $Ln\left|R(t)\right| = kt + c$

Por tanto $Ln(R(t)) = kt + c$, ahora aplicamos la función exponencial: $R(t) = e^{kt+c}$

por propiedades de la función exponencial resulta: $R(t) = e^{kt}e^{c}$

es decir $R(t) = C_0 e^{kt}$ con $C_0 = e^{c}$

Además sabemos que $R(0) = C_1\, e^{k(0)} = R_0$

de donde $C_0(1) = R_0$ $\quad C_0 = R_0$

Por lo que $R(t) = R_0\, e^{kt}$

También sabemos que $R(1620) = R_0\, e^{k(1620)} = \dfrac{R_0}{2}$

de donde $R_0 e^{k(1620)} = \dfrac{R_0}{2}$ $\quad e^{k(1620)} = \dfrac{R_0}{2R_0}$ $\quad e^{k(1620)} = \dfrac{1}{2}$

$$Ln\left(e^{k(1620)}\right) = Ln\left(\frac{1}{2}\right) \qquad k(1620) = -Ln(2) \qquad k = \frac{-Ln(2)}{1620} \approx -0.000427$$

Y finalmente tenemos la función $R(t) = R_0\, e^{-0.000427t}$

Así, para t = 100 se tiene $R(100) = R_0\, e^{-0.0427}$, lo que equivale a $R(100) \approx R_0\,(0.9582)$
Es decir, **después de cien años habrá el 95.82 %** de la cantidad inicial.

Ejemplo 2. **Tamaño de un lote económico**

Una empresa produce y vende anualmente 10,000 unidades de un artículo. Las ventas están distribuidas uniformemente a lo largo del año. La empresa desea determinar el número de unidades que deben fabricarse en cada período de producción para minimizar los costos totales anuales de operación y los costos de inventario. Se produce el mismo número de unidades en cada período. Este número *r* se denomina ***tamaño económico del lote*** o ***cantidad económica de pedido.*** El costo de producir cada unidad es de $20 y los costos de inventario (seguro, interés, almacenamiento, etc.) se estiman iguales al 10% del valor del inventario promedio. Los costos de operación por período de producción son $40. Encontrar el tamaño económico del lote.

Solución: Sea q el número de unidades en un período de producción. Como las ventas están distribuidas a razón uniforme, supondremos que el inventario varía uniformemente de q a 0 entre periodos de producción. Así, tomamos el inventario medio igual a $q/2$ unidades. Los costos de producción son de $20 por unidad, por lo que el valor del inventario promedio es de 20 (q/2). Los costos del inventario son el 10% de este valor, i.e., $20\left(\dfrac{q}{2}\right)(0.10) = q$

El número de períodos de producción por año es de 10,000/q. Así, los costos totales de operación son $40\left(\dfrac{10{,}000}{q}\right)$.

Por lo tanto, el total C de los costos del inventario y operación está dado por:

$C = 0.10\ (20)\left(\frac{q}{2}\right) + 40\left(\frac{10{,}000}{q}\right). \quad = q + \frac{400{,}000}{q^2}$

$\frac{dC}{dq} = 1 - \frac{400{,}000}{q^2} = \frac{q^2 - 400{,}000}{q^2}$

Haciendo $\frac{dC}{dq} = 0$, obtenemos $\quad q^2 = 400{,}000.$

Como $q > 0$, escogemos $\quad q = \sqrt{400{,}000} = 200\sqrt{10} \approx 632.5$

Para determinar si este valor de q minimiza a C, examinaremos la primera derivada.
Si $0 < q < \sqrt{400{,}000}$, entonces $\frac{dC}{dq} < 0$. Si $q > \sqrt{400{,}000}$, entonces $\frac{dC}{dq} > 0$.
Concluimos que en $q = 632.5$ se tiene un mínimo absoluto. El número de periodos de producción es de $10{,}000/632.5 \approx 15.8$ se tendría entonces prácticamente 16 lotes, cada uno con tamaño económico de lote igual a 625 unidades.

Ejemplo 3. Determinación de la edad de una herramienta antigua

Se encontró que una herramienta de madera hallada en una excavación en el medio oriente tiene una relación de carbono 14 a carbono 12 igual a 0.6 de la relación correspondiente de un árbol actual. Estimar la edad de la herramienta al ciento de años más cercano.

Solución

Sea N la cantidad de carbono 14 presente en la madera t años después de que se fabricó la herramienta. N sigue el planteamiento:

$N = N_0 e^{-\lambda t}$ donde N_0 es la cantidad de carbono 14, cuando t=0

Como la relación de carbono 14 a carbono 12 es igual a 0.6, entonces debemos encontrar el valor de t para el cual N=0.6 N_0 .

$$0.6N_0 = N_0 e^{-\lambda t}$$
$$0.6 = e^{-\lambda t}$$
$$-\lambda t = \ln(0.6),$$
$$t = -\frac{1}{\lambda}\ln(0.6).$$

Los siguientes datos son conocidos: la vida media es $=\frac{\ln 2}{\lambda}\approx\frac{0.69315}{\lambda}$ y en particular para el carbono 14 es de 5600 años.

Por tanto $\lambda=\frac{\ln 2}{5600}$, la sustituir

$$
\begin{aligned}
t &= -\frac{1}{\frac{(\ln 2)}{5600}}\ln(0.6) \\
&= -\frac{5600\ln(0.6)}{\ln 2} \\
&\approx 4100
\end{aligned}
$$

La herramienta hallada tiene aproximadamente 4100 años.

Problemas de Crecimiento y decaimiento exponencial

1.- **Crecimiento Poblacional**. Entre 1980 y 1993, la razón de cambio del número de médicos en EU. era proporcional al número de ellos. Para $t = 0$ la población de médicos correspondiente a 1980 era de 476, y en 1988 estaban aumentando a razón de 15.23 médicos por año. Determina la función población para esos años.

2.- **Inflación**. Si la tasa de inflación anual es, en promedio, del 5 % en los próximos 10 años.

a) Verifica que la razón de cambio de C, respecto a *t* medido en años, es proporcional a C. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

b) Determina la función que da el costo C de bienes o servicios en los años de esa década

c) Si el cambio de aceite de su automóvil cuesta hoy $250, estima el precio dentro de 10 años.

3.- **Interés compuesto**. Completa la tabla para determinar el balance *A* de *P* dólares depositados a una tasa *r* de interés durante *t* años y compuesto n veces al año.

a). $P = 1000$, $r = \frac{5}{100}$ y $t = 30$ años.

b). $P = 2500$, $r = \frac{6}{100}$ y $t = 20$ años.

n	1	2	4	12	365	Continuo
A						
A						

4.- **Crecimiento de población.** En cierta ciudad, la población en cualquier tiempo cambia a una razón proporcional a la población existente. Si en 1980 había 20 000 habitantes y en 1990 había 24 000, encuentra una ecuación para la población en el tiempo t, donde t es el número de años después de 1980.
Puedes asumir que el logaritmo natural de 1.2 es igual a 0.18. ¿Cuál es la población esperada en el año 2010?

5.- **Desintegración radiactiva**. Completa la tabla para cada isótopo radiactivo.

Isótopo	Vida media en años	Cantidad inicial	Cantidad después de 1000 años.	Cantidad después de 10 000 años.
Ra^{226}	1620	10 g.		
Ra^{226}	1620		1.5 g.	
C^{14}	5730			2 g.
C^{14}	5730	3 g.		
Pu^{239}	24 360		2.1 g.	
Pu^{239}	24 360			0.4 g.

6.- **Crecimiento de población.** La población de un pueblo se incrementa por crecimiento natural a una razón proporcional al número **N** de personas presentes. Si la población en el tiempo $t = 0$ es de 10 000, encuentra dos expresiones para la población **N**, t años después, si la población se duplica en 50 años. Supón que el logaritmo natural de 2 es igual a 0.69. Encuentra también **N** para $t = 100$.

7.- Fechado con Carbono. Se encontró que un rollo de papiro egipcio tiene una relación de carbono 14 con carbono 12 igual a 0.7 de la relación correspondiente a la de un material similar actual. Estima la edad del rollo al ciento de años más cercano.

8.- **Fechado con Carbono**. Un espécimen arqueológico recientemente descubierto tiene una relación carbono 14 con carbono 12 igual a 0.2 de la relación correspondiente a la de un material orgánico similar actual. Estima la edad del espécimen al ciento de años más cercano.

Soluciones Problemas de Crecimiento y decaimiento exponencial de la unidad 4.

1. $P(t) = 476\, e^{0.1523\, t}$
2.
   a) $k = 0.05$
   b) $C(t) = 250\, e^{0.05\, t}$
   c) $C(10) = \$\, 412.18$

3. *Con la fórmula* $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

n	1	2	4	12	365	Continuo
A	4 321.94	4 399.79	4 440.21	4 467.74	4 481.23	4 481.69
A	10 804.86	10 999.47	11 100.53	11 169.36	11 203.07	11 204.22

4. $P = 20\,000\, e^{0.018\, t}$ *y la población esperada en el 2010 es de 34 320 habitantes*
5.

Desintegración radiactiva. Se emplea $C = C_0\, e^{k\, t}$

Isótopo	Vida media en años	Cantidad inicial	Cantidad después de 1000 años.	Cantidad después de 10 000 años.
Ra^{226}	1620		6.52g	0.14g
Ra^{226}	1620	2.3g		0.03g
C^{14}	5730	6.7g	5.9g	
C^{14}	5730		2.7g	0.9g
Pu^{239}	24 360	2.16g		1.6g
Pu^{239}	24 360	0.53g	0.52g	

6. $N = 10\,000\, e^{0.0138t}$ *y N (100) = 39 749 habitantes.*
7. *Aproximadamente tiene 2 800 años tiene el papiro egipcio.*
8. *Aproximadamente tiene 13 000 años de edad el espécimen.*

Bibliografía

Bibliografía sugerida

Bittinger, Marvin. Cálculo para Ciencias Económico-administrativas. Séptima edición, Addison-Wesley, Colombia, 2002.
Goldstein, L. J. et. al. Cálculo y sus aplicaciones, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1987.
Hughes, Deborah et. al. Cálculo Aplicado, CECSA, México, 2002.
Salinas, Patricia, et. al. Elementos del Cálculo, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2004.
Stewart, James, Cálculo de una variable, trascendentes tempranas, Thomson–Learning, Cuarta Edición, 2001.
Stein, Sherman y Barcellos, A. Cálculo y Geometría Analitíca.1, McGraw – Hill, Colombia, 1995.
Warner, Stefan y Costenoble, Steven. Cálculo Aplicado. Segunda Edición, Thomson, México, 2002.

Lecturas educativas

Filloy, Eugenio et. al. Matemática Educativa. Fondo de Cultura Económica, México, 2003.
"El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje del límite y continuidad de funciones y tangencia, contacto y la diferencial".
Cantoral, Ricardo. Matemática Educativa. Un Estudio de la formación social de la analiticidad. Grupo Editorial Iberoamérica, México,

Bibliografía adicional

Granville, W. A. Cálculo Diferencial e Integral. Noriega Editores y Limusa, México 1991.
Swokowski, E. W. Cálculo con Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica, Segunda edición, 1987.
Jagdish, C. at. al. Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía, Prentice Hall-Hispanoamericana, Tercera Edición, México, 1992.